JOURNAL OF ALGEBRA 106, 287–366 (1987)

# Idéaux complètement premiers de l'algèbre enveloppante de $gl_n(\mathbb{C})$

C. MŒGLIN

*Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, 75230 Paris, France*

*Communicated by A. W. Goldie*

Received October 24, 1984

EN L'HONNEUR DE J. DIXMIER

## INTRODUCTION

Le but de ce travail est de démontrer, comme l'avait conjecturé J. Dixmier, que tout idéal primitif complètement premier de l'algèbre enveloppante de $sl_n(\mathbb{C})$ est induit au sens suivant:

Soit $I$ un idéal primitif complètement premier de $U(sl_n(\mathbb{C}))$, alors il existe une sous-algèbre parabolique, notée $\mathfrak{q}$, de $sl_n(\mathbb{C})$ et une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{q}$, tels que $I$ soit l'annulateur de la représentation induite de $\mathfrak{q}$ à $sl_n(\mathbb{C})$.

En fait nous démontrons ce résultat en remplaçant $sl_n(\mathbb{C})$ par $gl_n(\mathbb{C})$, ce qui est strictement équivalent; et pour cela nous utilisons les idées de [Di 1]. En effet une étape importante dans la démonstration est la preuve de la conjecture [Di 1, 6.12] sous la forme suivante:

soient $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de $gl_n(\mathbb{C})$ qui est le stabilisateur d'un point différent de 0 de la représentation naturelle de $gl_n(\mathbb{C})$ et $I$ un idéal primitif complètement premier de $U(gl_n(\mathbb{C}))$, alors l'idéal $I \cap U(\mathfrak{p})$ de $U(\mathfrak{p})$ est un idéal primitif complètement premier.

De plus, soit $r$ un entier, notons $Z(\mathfrak{g})_r$ la sous-algèbre du centre de $U(gl_n(\mathbb{C}))$ engendrée par l'ensemble des éléments de degré inférieur ou égal à $r$. Nous montrons que l'application, notée $\varphi$, qui à $I$ associe $I \cap U(\mathfrak{p})$ et $I \cap Z(\mathfrak{g})_r$ est injective à condition que $r$ soit bien choisi, ce choix dépendant de $I \cap U(\mathfrak{p})$ (cf. II.20 et II.3). Pour terminer la démonstration, utilisant une récurrence, on montre que la restriction de $\varphi$ à l'ensemble des idéaux primitifs induits est surjective; le point important, pour cela, est de calculer $I \cap U(\mathfrak{p})$ quand on suppose que $I$ est un idéal primitif induit (c'est l'objet de la section III). Pour faire ce calcul, on construit suffisamment d'élémen'.



0021-8693/87 $3.( )

appartenant à $I$ (cf. III.16). Malheureusement, toutes ces démonstrations nécessitent beaucoup de calculs, d'où la présence de la section I qui est purement technique. Comme cela ne demande pas plus de travail, on fait la plupart des démonstrations pour des idéaux complètement premiers (non nécessairement primitifs). Pour les liens entre ces résultats et la construction d'une application de Dixmier pour $sl_n(\mathbb{C})$, je renvoie à [B, 1] et [BJ] où cette application est construite et où ils montrent qu'elle est injective; ici c'est la surjectivité qui est prouvée.

## 0. Notations et remarques

On pose

(1)
- $\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{C})$.
- $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.
- $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$.
- $\{x_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$: la base habituelle de $\mathfrak{g}$; i.e., l'ensemble des matrices $n \times n$ ayant un seul élément non nul.
- $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, en tant qu'espace vectoriel, engendrée par l'ensemble des éléments $(x_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 < j \leqslant n}$.
- $\delta_{ij}$ est le symbole de Kroneker; i.e.:
- $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.

(2)
- Soient $r$ un entier positif et $A$ une matrice $r \times r$ à coefficients dans une algèbre quelconque de la forme $(a_{vw})_{1 \leqslant v, w \leqslant r}$; on note $\mathfrak{S}_r$ le groupe symétrique de degré $r$.
- $\varepsilon$ l'unique homomorphisme non trivial de $\mathfrak{S}_r$ dans $\mathbb{Z}$.
- $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) \prod_{s=1}^{r} a_{\sigma(s)s}$.

Nous utiliserons fréquemment que det est bilinéaire en les lignes et les colonnes, qu'on peut le développer suivant la première ou la dernière colonne de la façon suivante:

$$\det A = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} a_{i1} A'_i = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+i} A''_i a_{ir}$$

où $A'_i$ et $A''_i$ sont les mineurs évidents.

De plus, après permutations des lignes de $A$, le déterminant n'est changé que par multiplication par le signe de la permutation.

Dans (Di 1, §1) se trouve un certain nombre de propriétés supplémentaires de det $A$ quand $A$ a certaines propriétés.

(3) Soit $r$ un entier positif, on note $E_r$ l'ensemble des $r$-uples d'entiers compris entre 1 et $n$ au sens large et $E'_r$ l'ensemble des $r$-uples d'entiers

compris entre 1 et $n+1$ au sens strict. Un élément de $E_r$ ou $E'_r$ sera noté des deux façons suivantes

$$\{i\} \qquad \text{ou } (i_1, \ldots, i_r).$$

On utilisera la même convention pour les éléments de $\mathbb{C}^r$. En outre soient $\{i\}$ un élément de $\mathbb{C}^r$ et $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_r$; on pose:

$$|i| = \sum_{s=1}^{r} i_s,$$

$$\sigma\{i\} = (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}).$$

Pour unifier les notations, on conviendra que $E_0$ et $E'_0$ sont l'ensemble vide et suivant la coutume, quand un élément est omis il est surmonté d'un $\hat{}$, i.e.,

$$(i_1, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_r) = (i_1 \cdots i_{j-1} i_{j+1} \cdots i_r).$$

(4) Soient $r$ un entier positif, $\{i\}$, $\{j\}$ des éléments de $E_r$ et $\alpha$ un nombre complexe; on note $D(\{i\}; \{j\}; \alpha)$ le déterminant de la matrice $(a_{v,w})_{1 \leqslant v, w \leqslant r}$ où l'on a:

$$a_{vw} = x_{i_v j_w} + (\alpha - (w-1))\, \delta_{i_v j_w}.$$

Si $\alpha = 0$, on oublie $\alpha$ dans la notation qui devient $D(\{i\}; \{j\})$.

(5) Soient $r$ un entier positif et $(i, j)$ un élement de $E_2$ on pose:

$$\Psi^r_{ij} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\{i\} \in E_{r-1}} D(ii_1 \cdots i_{r-1}; i_1 \cdots i_{r-1} j),$$

$$\Phi^r_{ij} = \sum_{\{i\} \in E_{r-1}} x_{ii_1} x_{i_1 i_2} \cdots x_{i_{r-1} j},$$

$$Z_r = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n} \Psi^r_{ii}.$$

Si $r$ égale 0, on pose:

$$\Psi^0_{ij} = \Phi^0_{ij} = \delta_{ij},$$

$$Z_0 = 0.$$

Remarquons, que si $r$ égale 1, les éléments $\Psi^r_{ij}$ et $\Phi^r_{ij}$ coïcident avec $x_{ij}$; en outre quel que soit $r$, comme précédemment, les éléments $\Psi^r_{1j}$ sont très voisins des éléments de [Di 1, 2.6] notés $X_{r+1,j}$; et on verra que $Z_r$ est un élément de degré $r$ de $Z(\mathfrak{g})$.

(6) Soient $r$ un entier positif, $\{i\}$, $\{j\}$ des éléments de $E_r$ et $\{m\}$ un élément de $\mathbb{N}^r$; on note

- $Y(\{i\}; \{j\}; \{m\})$ le déterminant de la matrice $(a_{vw})_{1 \leqslant v, w \leqslant r}$ où $a_{vw}$ est égal à $\Phi^{m_w}_{i_v j_v}$.
- $X(\{i\}; \{j\}; \{m\})$ le déterminant de la matrice $(b_{vw})_{1 \leqslant v, w \leqslant r}$ où $b_{vw}$ est égal à $\Phi^{m_v}_{i_w j_w}$.
- $T(\{i\}; \{j\}; \{m\})$ le déterminant de la matrice $(c_{vw})_{1 \leqslant v, w \leqslant r}$ où $c_{vw}$ est égal à $\Phi^{m_w}_{i_v j_w}$.

Si tous les éléments du $r$-uple $\{i\}$ ou $\{j\}$ sont égaux à $i$ ou à $j$, on notera $Y(i; \{j\}; \{m\})$ ou $Y(\{i\}; j; \{m\})$ au lieu de $Y(\{i\}; \{j\}; \{m\})$. Même convention pour $X(\ )$, et aussi pour $T(\ )$ si tous les éléments du $r$-uple $m$ sont égaux. En outre si l'on a:

$$\{m\} = (r, r-1, ..., 1),$$

on supprime $\{m\}$ des notations précédentes.

(7) On note $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ et on munit $U(\mathfrak{g})$ de sa filtration habituelle; soit $d$ un entier, on note $U(\mathfrak{g})_d$ le sous-espace vectoriel ensemble des éléments de filtration inférieure ou égale à $d$; on conviendra aussi que $U(\mathfrak{g})_{-1}$ est l'ensemble vide. On identifie $S(\mathfrak{g})$ aux fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ grâce à la forme de Killing et $U(\mathfrak{g})_d/U(\mathfrak{g})_{d-1}$ au sous-espace vectoriel de $S(\mathfrak{g})$ ensemble des polynômes homogènes de degré $d$. Soient $u$ un élément de $U(\mathfrak{g})$ et $d$ le plus petit entier tel que $u$ soit un élément de $U(\mathfrak{g})_d - U(\mathfrak{g})_{d-1}$; alors on note $\operatorname{gr} u$ l'image de $u$ dans $U(\mathfrak{g})_d/U(\mathfrak{g})_{d-1}$; on considère $\operatorname{gr} u$ comme un élément de $S(\mathfrak{g})$ et on dit que $d$ est le degré de $u$. Remarquons que $x_{ij}$ en tant qu'élément de $S(\mathfrak{g})$ s'identifie avec la fonction qui à l'élément $x$ de $\mathfrak{g}$ associe sa $(j, i)^{\text{ième}}$ coordonnée (i.e., l'élément dans la matrice représentant $x$ qui se trouve à l'intersection de la $j^{\text{ième}}$ ligne et de la $i^{\text{ième}}$ colonne).

(8) En reprenant les notations de (5), (6) et (7) il est facile de voir que $\operatorname{gr} \Phi^r_{ij}$ est la fonction notée $(x^r)_{ji}$ qui à $x$ associe la $(j, i)^{\text{ième}}$ coordonnée de $x^r$; il est aussi facile de voir que $Y(\{i\}; \{j\}; \{m\})$, $X(\{i\}; \{j\}; \{m\})$ et $T(\{i\}; \{j\}; \{m\})$ sont des éléments de $U(\mathfrak{g})_{|m|}$ et que leurs images dans $U(\mathfrak{g})_{|m|}/U(\mathfrak{g})_{|m|-1}$ sont les fonctions déterminants des matrices $r \times r$ suivantes

$$(a'_{vw}) \qquad \text{où } a'_{vw} = (x^{m_w})_{j_v i_v},$$

$$(b'_{vw}) \qquad \text{où } b'_{vw} = (x^{m_v})_{j_w i_w},$$

$$(c'_{vw}) \qquad \text{où } c'_{vw} = (x^{m_v})_{j_w i_v}.$$

Ces fonctions sont nulles si et seulement si deux lignes ou deux colonnes coïncident, ce qui n'est pas le cas en général pour les éléments dont elles proviennent dans $U(\mathfrak{g})$. Toutefois celles qui sont non nulles sont le gradué de l'élément de $U(\mathfrak{g})$ correspondant.

# I

I.1. Cette partie est consacrée à la démonstration de lemmes techniques; pour faciliter l'écriture, très souvent dans les lemmes, on notera $u$ l'élément à calculer; cette notation est générique et évite de traîner des éléments compliqués dans la démonstration.

I.2. LEMME. *Soient $r$ un entier positif, $\{i\}$, $\{j\}$ des éléments de $E_r$ et $\alpha$ un élément de $\mathbb{C}$; alors on a:*

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r;\ D(\{i\}; \{j\}; \alpha) = \varepsilon(\sigma)\, D(\{i\}; \sigma\{j\}; \alpha).$$

*En particulier $D(\{i\}; \{j\}; \alpha)$ est nul si $\{j\}$ n'est pas un r-uple d'entiers distincts.*

Il suffit de considérer le cas où $\sigma$ est une transposition de deux entiers consécutifs, notés $s$ et $s+1$; en outre la définition (cf. 0.(2)) du déterminant montre qu'il suffit alors de considérer le cas où $r$ égale 2, en remplaçant $\alpha$ par $\alpha-(s-1)$, nombre que nous notons $\beta$. Faisons ces hypothèses et posons:

$$\{i\} =: (i, k),$$
$$\{j\} = (j_s, j_{s+1}) =: (v, w).$$

On a

$$\begin{aligned}(x_{iv} + \beta\,\delta_{iv})&(x_{kw} + (\beta-1)\,\delta_{kw}) - (x_{kv} + \beta\,\delta_{kv})(x_{iw} + (\beta-1)\,\delta_{iw})\\ &+ (x_{iw} + \beta\,\delta_{iw})(x_{kv} + (\beta-1)\,\delta_{kv}) - (x_{w} + \beta\,\delta_{kw})(x_{iv} + (\beta-1)\,\delta_{iv})\\ = {}&[x_{iv}, x_{kw}] - [x_{kv}, x_{iw}] + \delta_{iv} x_{kw} - x_{iv}\,\delta_{kw}\\ &+ x_{kv}\,\delta_{iw} - \delta_{kv} x_{iw} = 0.\end{aligned}$$

D'où le lemme.

I.3. LEMME (notations I.2). *Soit $(v, w)$ un élément de $E_2$, alors on a:*

$$\begin{aligned}u &:= [D(\{i\}; \{j\}; \alpha), x_{vw}]\\ &= \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1}(D(\{i\}; wj_1 \cdots \hat{j}_s \cdots j_r; \alpha)\,\delta_{vj_s}\\ &\quad - D(vi_1 \cdots \hat{\imath}_s \cdots i_r; \{j\}; \alpha)\,\delta_{i_s w}).\end{aligned}$$

Soient $s$ et $t$ des entiers compris entre 1 et $r$ au sens large; on note $A$ la matrice servant à définir $D(\{i\}; \{j\}; \alpha)$ (cf. 0.(4)) et on définit les matrices $r \times r$, $A(s, t)$ et $A'(s, t)$, comme étant les matrices identiques à $A$ sauf sur la $s^{\text{ième}}$ colonne où tous les éléments sont nuls sauf celui qui est sur la $t^{\text{ième}}$ ligne qui vaut $x_{i_t w}$ et $x_{i_t w} + (\alpha - (s-1)\,\delta_{i_t w}$ respectivement. On définit de manière analogue les matrices $B(s, t)$ et $B'(s, t)$ en changeant $s^{\text{ième}}$ colonne et $t^{\text{ième}}$ ligne par $s^{\text{ième}}$ ligne et $t^{\text{ième}}$ colonne et $x_{i_t w}$ par $x_{vj_t}$. Il est clair que l'on a

- $u = \sum\limits_{s=1}^{r} \left( \sum\limits_{t=1}^{r} A(s, t)\,\delta_{vj_s} - B(s, t)\,\delta_{i_s w} \right);$
- $(A(s, t) - A'(s, t))\,\delta_{vj_s} = (B(t, s) - B'(t, s))\,\delta_{i_t w}.$

D'où

$$u = \sum_{s=1}^{r} \left( \left( \sum_{t=1}^{r} A'(s, t) \right) \delta_{vj_s} - \left( \sum_{t=1}^{r} B'(s, t) \right) \delta_{i_s w} \right).$$

I.4. *Remarque.* Soient $r$ un entier positif, $(i, j)$ un élément de $E_2$, $\{i\}$ un élément de $E_{r-1}$ et $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_{r-1}$; alors il résulte clairement de 0.(2) et I.2 que l'on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{C};\ D(ii_1 \cdots i_{r-1}; i_1 \cdots i_{r-1} j; \alpha) = D(ii_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r-1)}; j_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(r-1)} j; \alpha).$$

I.5. LEMME (cf. 0.(5)). *Soient $r$ un entier positif, $(i, j)$ et $(v, w)$ des éléments de $E_2$, alors on a:*

$$u := [\Psi^r_{ij}, x_{vw}] = \Psi^r_{iw}\,\delta_{vj} - \Psi^r_{vj}\,\delta_{iw}.$$

D'après 0.(5) et I.3 et I.4, on a:

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\{i\} \in E_{r-1}} & D(ii_1 \cdots i_{r-1}, i_1 \cdots i_{r-1} w)\,\delta_{vj} \\ & - D(vi_1 \cdots i_{r-1}; i_1 \cdots i_{r-1} j)\,\delta_{iw} \\ & + \frac{1}{(r-2)!} \sum_{\{i\} \in E_r - 2} D(ivi_1 \cdots i_{r-2}; wi_1 \cdots i_{r-2} j) \\ & - D(ivi_1 \cdots i_{r-2}; wi_1 \cdots i_{r-2} j) \end{aligned}$$

d'où le lemme.

I.6. COROLLAIRE. *Soit $r$ un entier positif alors l'élément $Z_r$ défini en* (0(5)) *appartient à $Z(\mathfrak{g})$.*

C'est un corollaire immédiat de I.5.

I.7. LEMME (notations I.5 et I.6). *On a*:

$$\Psi^r_{11} - Z_r \in U(\mathfrak{p}).$$

Remarquons que le lemme est clair si $r$ égale 1 et supposons donc que $r$ est supérieur ou égal à 2. Soit $i$ un élément de $E'_1$; d'après la définition et I.3, on a:

$$U(\mathfrak{p}) \ni \Psi^r_{ii} - \frac{1}{(r-2)!} \sum_{\{i\} \in E_{r-2}} D(i1i_1 \cdots i_{r-2}; 1i_1 \cdots i_{r-2}i).$$

Or d'après I.2, on a aussi:

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{\{i\} \in E_{r-2}} D(i1i_1 \cdots i_{r-2}; 1i_1 \cdots i_{r-2}i)$$

$$= (r-1) \sum_{\{i\} \in E_{r-1}} D(1i_1 \cdots i_{r-1}; i_1 \cdots i_{r-1}1) = (r-1)\, \Psi^r_{11};$$

d'où finalement:

$$U(\mathfrak{p}) \ni \sum_{i=2}^{n} \Psi^r_{ii} - (r-1)\, \Psi^r_{11},$$

le lemme est alors clair par définition de $Z_r$.

I.8. *Remarques.* En utilisant I.2, on voit que l'on a:

(1) $$Z_r = (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} \sum_{\{i\} \in E_r} D(\{i\}; \{i\}).$$

(2) $$\Psi^r_{1j} \in U(\mathfrak{p}), \qquad \forall j > 1.$$

(3) $$\Psi^r_{ij} = 0 \qquad \text{si } i \neq j \text{ et } r \geqslant n \text{ ou si } i = j \text{ et } r > n.$$

I.9. LEMME (notations de I.5). *On a*

$$\Psi^r_{ij} = \left( \sum_{l=1}^{n} \Psi^{r-1}_{il} (x_{lj} - (r-1)\, \delta_{lj}) \right) - Z_{r-1}(x_{ij} - (r-1)\, \delta_{ij}),$$

Le lemme est clair si $r$ égale 1; supposons donc $r$ plus grand que 1. Soit $\{i\}$ un élément de $E_{r-1}$, en développant le déterminant calculant $D(ii_1 \cdots i_{r-1}; i_1 \cdots i_{r-1}j)$ suivant la dernière colonne on voit qu'il vaut (cf. 0.(2)):

(1) $$(-1)^{r-1} D(\{i\}; \{i\})(x_{ij} - (r-1)\, \delta_{ij})$$
$$+ \sum_{s=1}^{r-1} (-1)^{r+s-1} D(ii_1 \cdots \hat{\imath}_s \cdots i_{r-1}; \{i\}) \times (x_{i_s j} - (r-1)\, \delta_{i_s j}).$$

En outre pour tout entier $s$ compris entre 1 et $r-1$ au sens large, on a d'après I.2:

$$\sum_{\{i\} \in E_{r-1}} (-1)^{r+s-1} D(ii_1 \cdots \hat{\imath}_s \cdots i_{r-1}; \{i\})$$

$$= \sum_{\{i\} \in E_{r-1}} D(ii_1 \cdots \hat{\imath}_s \cdots i_{r-1}; i_1 \cdots \hat{\imath}_s \cdots i_{r-1} i_s)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{\{i\} \in E_{r-2}} D(ii_1 \cdots i_{r-1}; i_1 \cdots i_{r-1} l).$$

Le lemme résulte donc de la définition de $\Psi^r_{ij}$ de (1) et de I.8(1).

I.10. LEMME. *Soient $r, t$ des entiers, $(v, w)$ et $(i, j)$ des éléments de $E_2$; alors on a*:

(1) $$\Phi^{r+t}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \Phi^r_{il} \Phi^t_{lj}.$$

(2) *Il existe des ensembles d'éléments de $Z(\mathfrak{g})$ indépendants de $(i, j)$, notés $(Z_s(r))_{1 \leqslant s \leqslant r}$ et $(Z'_s(r))_{1 \leqslant s \leqslant r}$, tel que l'on ait*:

$$\Phi^r_{ij} - \Psi^r_{ij} = \sum_{s=1}^{r} Z_s(r) \Psi^{r-s}_{ij} = \sum_{s=1}^{r} Z'_s(r) \Phi^{r-s}_{ij}.$$

(3) *L'élément $\Phi^r_{11}$ appartient au sous-$Z(\mathfrak{g})$-module de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $U(\mathfrak{p})$.*

(4) $$[\Phi^r_{ij}, x_{vw}] = \Phi^r_{iw} \delta_{jv} - \Phi^r_{vj} \delta_{iw}.$$

(1) est immédiat d'après les définitions.

(2) se montre par récurrence sur $r$; le cas de $r$ égal 0 est trivial par définition. Supposons donc que $r$ est positif et que (2) est vrai jusqu'à $r-1$. D'après (1) et l'hypothèse de récurrence, puis I.9, on a:

$$\Phi^r_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \Phi^{r-1}_{il} x_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left( \Psi^{r-1}_{i} x_{lj} + \sum_{s=1}^{r-1} Z_s(r-1) \Psi^{r-s-1}_{il} x_{lj} \right)$$

$$= \Psi^r_{ij} + (r-1) \Psi^{r-1}_{ij} + Z_{r-1}(x_{ij} - (r-1) \delta_{ij})$$

$$+ \sum_{s=1}^{r-1} Z_s(r-1)(\Psi^{r-s}_{ij} + (r-s) \Psi^{r-s-1}_{ij} + Z_{r-s-1}(x_{ij} - (r-s-1) \delta_{ij})).$$

D'où la première partie de (2) la deuxième en découle formellement.

(3) résulte de (2) et de I.7.

(4) résulte de (2) et de I.5.

I.11. LEMME. *Soient $r$ et $k$ des entiers, $(i, j)$ et $(v, w)$ des éléments de $E_2$; alors on a:*

$$u := [\Phi^k_{ij}, \Phi^r_{vw}] = \sum_{s=1}^{k} \Phi^{k-s}_{vj} \Phi^{r+s-1}_{iw} - \Phi^{r+s-1}_{vj} \Phi^{k-s}_{iw}$$

$$= \sum_{s=1}^{r} \Phi^{r-s}_{vj} \Phi^{k+s-1}_{iw} - \Phi^{k+s-1}_{vj} \Phi^{r-s}_{iw}.$$

*En outre la première sommation (resp. deuxième) coïncide avec une sommation du même type mais où $s$ ne varie que de* $\sup(1, k-r+1)$ *(resp.* $\sup(1, r-k+1)$*) à $k$ (resp. $r$).*

La deuxième partie du lemme résulte de la remarque suivante: supposons que $k-r$ est un entier positif et soit $s$ un entier positif qui lui est inférieur ou égal, alors $s' := k-r-s+1$ est un entier positif et on a:

$$\sum_{s=1}^{k-r} \Phi^{k-s}_{vj} \Phi^{r+r-1}_{iw} = \sum_{s'=1}^{k-r} \Phi^{r+s'-1}_{vj} \Phi^{k-s'}_{iw}.$$

Un raisonnement analogue pour la deuxième sommation termine la démonstration de la deuxième partie du lemme. Grâce à cela, on voit que le lemme est trivial si $r$ égale 0 et qu'il est équivalent à I.10(4) si $r$ égale 1. On démontre alors le lemme par récurrence sur $r$ en supposant que $r$ est supérieur ou égal à 2 et qu'il est vrai jusqu'à $r-1$. Démontrons d'abord la première égalité; grâce à I.10(1), on a:

$$\Phi^r_{vw} = \sum_{l=1}^{n} \Phi^{r-1}_{vl} x_{lw}; \tag{1}$$

d'où avec l'hypothèse de récurrence et I.10(4), on a:

$$u = \sum_{l=1}^{n} \left( \sum_{t=1}^{k} (\Phi^{k-t}_{vj} \Phi^{r+t-2}_{il} - \Phi^{r+t-2}_{vj} \Phi^{k-t}_{il}) x_{lw} + \Phi^{r-1}_{vl} \Phi^{k}_{iw} \delta_{lj} - \Phi^{r-1}_{vl} \Phi^{k}_{lw} \right);$$

et avec I.10.(1):

$$u = \sum_{t=1}^{k} \Phi^{k-t}_{vj} \Phi^{r+t-1}_{iw} - \sum_{t=1}^{k} \Phi^{r+t-2}_{vj} \Phi^{k-t}_{iw} + \Phi^{r-1}_{vj} \Phi^{k}_{iw} + \Phi^{r+k-1}_{vw}.$$

En faisant $s$ égal $t$ dans la première sommation et $s$ égal $t-1$ dans la deuxième et en tenant compte des deux derniers termes pour rectifier les bornes, on trouve la première égalité du lemme. La deuxième se démontre de manière analogue mais en utilisant à la place de (1), l'égalité suivante qui résulte aussi de I.10(1):

$$\Phi^r_{vw} = \sum_{l=1}^{n} x_{vl} \Phi^{r-1}_{lw}.$$

I.12 LEMME. *Soient $r$ un entier positif, $i$ un élément de $E_1$, $\{j\}$ un élément de $E_r$, $\{m\}$ un élément de $\mathbb{N}^r$ et $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_r$; alors l'élément suivant:*

$$u_\sigma := Y(i; \{j\}; \{m\}) - \varepsilon(\sigma)\, Y(i; \{j\}; \sigma\{m\})$$

*appartient au sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $Y(i; \{j\}; \{m'\})$ pour lesquels $|m'|$ est strictement inférieur à $|m|$. Plus précisément soient $t$ un entier positif strictement inférieur à $r$ et $\sigma$ la transposition de $t$ et $t+1$, alors $u_\sigma$ appartient au sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments suivants:*

$$Y(i; \{j\}; m_1 \cdots m_t - s m_{t+1} + p - 1 \cdots v n_r) \qquad \text{où } s, p \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant p \leqslant s.$$

Il est clair qu'il suffit de démontrer la deuxième partie du lemme; et pour cela, en posant $m_t = k$ et $m_{t+1} = k'$, il suffit par définition du déterminant, 0.(2) et 0.(6), de vérifier que, quelque soit l'élément $(v, w)$ de $E_2$, l'élément suivant:

$$y := [\Phi_{iv}^{k}, \Phi_{iw}^{k'}] - [\Phi_{iw}^{k}, \Phi_{iv}^{k'}]$$

appartient à l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des éléments suivants:

$$y(s, p) := \Phi_{iv}^{k-s}\, \Phi_{iw}^{k'+p-1} - \Phi_{iw}^{k-s}\, \Phi_{iv}^{k'+p-1} \qquad \text{où } s, p \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant p \leqslant s.$$

En utilisant les deux égalités de I.11, on a:

$$\begin{aligned} y &= [\Phi_{iv}^{k}, \Phi_{iw}^{k'}] + [\Phi_{iv}^{k'}, \Phi_{iw}^{k}] \\ &= 2 \sum_{s=1}^{k} (\Phi_{iv}^{k-s}\, \Phi_{iw}^{k'+s-1} - \Phi_{iv}^{k'+s-1}\, \Phi_{iw}^{k-s}) \\ &= 2y(s, s) - 2[\Phi_{iv}^{k'+s-1}, \Phi_{iw}^{k-s}], \end{aligned}$$

et on obtient l'assertion en utilisant un nombre suffisant de fois la deuxième égalité de I.11.

I.13. *Remarque.* Par une démonstration analogue à celle de I.12, on voit que dans la deuxième partie de I.12 on peut remplacer $m_t - s$ par $m_t + p - 1$ et $m_{t+1} + p - 1$ par $m_{t+1} - s$ (où $1 \leqslant p \leqslant s$).

I.14. COROLLAIRE (notations de I.12). *On suppose en outre que tous les éléments de r-uple $\{j\}$ sont distincts de $i$.*

(1) *On suppose qu'il existe un entier positif, noté $v$, tel que l'on ait:*

- $\{m_1, ..., m_r\} \supset \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant m \leqslant v\}$,
- *au moins deux éléments de r-uple $\{m\}$ coïncident avec $v$.*

*Alors on a*:

$$Y(i;\ \{j\};\ \{m\}) = 0.$$

(2) *On suppose qu'il existe deux éléments du r-uple* $\{m\}$ *qui sont égaux, alors* $Y(i;\ \{j\};\ \{m\})$ *appartient au sous-espace vectoriel de* $U(\mathfrak{g})$ *engendré par l'ensemble des éléments* $Y(i;\ \{j\};\ \{m'\})$ *où* $|m'|$ *est strictement inférieur à* $|m|$.

(3) *On suppose que* $|m|$ *est strictement inférieur à* $r(r+1)/2$ *alors, on a*:

$$Y(i;\ \{j\};\{m\}) = 0.$$

Avant de faire la démonstration, remarquons que l'hypothèse générale du corollaire assure que pour tout $r$-uple d'entiers, noté $\{m'\}$, contenant un élément nul, on a, par définition de $\Phi^0_{ij}$:

$$Y(i;\ \{j\};\ \{m'\}) = 0.$$

La démonstration de (1) se fait par récurrence sur $v$; si $v$ égale 1, alors (1) est vrai parce que $x_{ij}$ commute à $\Phi^m_{il}$ quels que soient l'entier $m$ et l'élement $(j,l)$ de $E_2$(cf. I.10(4)). Supposons donc que $v$ est strictement supérieur à 1 et que (1) est vrai jusq'à $v-1$; on choisit un sous-ensemble noté $\{s(1),..., s(v+1)\}$ de $\{1,..., r\}$ tel que l'on ait:

$$m_{s(1)} = 1,..., m_{s(v)} = m_{s(v+1)} = v.$$

Grâce à I.12 et l'hypothèse de récurrence, on sait que l'on a, pour des signes bien choisis:

$$\begin{aligned} Y(i;\ \{j\};\ \{m\}) &= \pm Y(i;\ \{j\}; m_1 \cdots \hat{m}_{s(1)} \cdots m_r 1) \\ &= \cdots = \pm\ Y(i;\ \{j\}; m'_1 \cdots m'_{r-(v+1)} vvv - 1 \cdots 1), \end{aligned}$$

où $\{m'_1,..., m'_{r-(v+1)}\}$ est le $r-(v+1)$ uple obtenu à partir de $\{m\}$ après avoir enlever $m_{s(1)} \cdots m_{s(v+1)}$. Alors (1) résulte encore une fois de I.12 appliqué à la transposition des 2 colonnes égales et de l'hypothèse de récurrence.

(2) est un corollaire immédiat de I.12.

(3) D'après (2) et la remarque faite au début de la démonstration, on sait que $Y(i;\ \{j\};\ \{m\})$ appartient au sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $Y(i;\ \{j\};\ \{m'\})$ où $\{m'\}$ vérifie:

- tous les entiers du $r$-uple $\{m'\}$ sont distincts et non nuls
- $|m'| \leqslant |m| < r(r+1)/2.$

Cet ensemble est vide et donc l'espace vectoriel engendré est nul d'où le corollaire.

I.15. *Remarques* (notations I.12). On suppose que tous les entiers du $r$-uple $\{j\}$ sont distincts de $i$.

(1) Soit $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_r$, alors on a:

$$Y(i; \{j\} = \varepsilon(\sigma)\, Y(i; \{j\}; \{\sigma(r) \cdots \sigma(1)\}).$$

(2) Soient $\{u_1 \cdots u_r\}$ et $\{v_1,..., v_r\}$ des $r$ uples d'éléments de $U(\mathfrak{g})$; on suppose que l'on a, pour tout entier $s$ compris entre 1 et $r$ au sens large

$$\sum_{t=1}^{r} u_t \Phi^t_{ij_s} = v_s$$

$$\left(\text{resp. } \sum_{t=1}^{r} \Phi^t_{ij_s} u_t = v_s\right)$$

alors on a:

$$u_r Y(i; \{j\}) = \sum (-1)^{s+1} v_s Y(i; j_1 \cdots \hat{j}_s \cdots j_r)$$

$$\left(\text{resp. } Y(i; \{j\})\, u_r = \sum (-1)^{s+1} Y(i; j_1 \cdots \hat{j}_s \cdots j_r)\, v_s\right).$$

(1) est un corollaire immédiat de 1.12 et I.14(3).

(2) résulte de I.14(1).

I.16. Lemme (notations I.12). *On suppose que tous les éléments de r-uple $\{j\}$ sont distincts de $i$; soit $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_r$, alors on a*:

$$X(i; \{j\}; \{m\}) = \varepsilon(\sigma)\, X(i; \sigma\{j\}; \{m\}).$$

Il est clair qu'il suffit de démontrer, que quels que soient $i$, $j$, $w$ des éléments de $E_1$ et $m$, $m'$ des entiers, on a:

$$u(m, m') := [\Phi^m_{ij}, \Phi^{m'}_{iw}] - [\Phi^{m'}_{ij}, \Phi^m_{iw}] = 0.$$

On démontre cela par récurrence sur $m'$; pour $m'$ égal 0, c'est trivial; supposons donc que $m'$ est un entier positif d'après I.11, on a:

$$\begin{aligned} u(m, m') = \sum_{s=1}^{m'} &\Phi^{m'-s}_{ij} \Phi^{m+s-1}_{iw} - \Phi^{m+s-1}_{ij} \Phi^{m'-s}_{iw} \\ &- \Phi^{m'-s}_{ij} \Phi^{m+s-1}_{iw} + \Phi^{m+s-1}_{ij} \Phi^{m'-s}_{iw} \\ = - &\sum_{s=1}^{m'} u(m+s-1,\, m'-s), \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après l'hypothèse de récurrence. (Remarquons que ce lemme se déduit assez facilement de [Di1, 1.6] et I.10(4).

I.17. LEMME (notations et hypothèse de I.14 et I.16). *L'élément suivant de $U(\mathfrak{g})$:*

$$u := Y(i; \{j\}; \{m\}) - X(i; \{j\}; \{m\})$$

*appartient au sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $Y(i; \{j\};\{t\})$ pour lesquels $|t|$ est strictement inférieur à $|m|$.*

Remarquons que, d'après I.11, le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $\prod_{s=1}^{r} \Phi_{ij_s}^{t_s}$ où $t$ parcourt l'ensemble des $r$-uples d'entiers est stable sous ad $\Phi_{ij}^{t}$ où $j$ est un élément du $r$-uple $\{j\}$ et $t$ un entier. Il contient $Y(i; \{j\}; \{m\})$ et $X(i, \{j\}; \{m\})$; en outre $u$ est la différence entre le déterminant d'une matrice et le déterminant de la matrice transposée et, en utilisant I.11, on voit que $u$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des éléments $\prod_{s=1}^{r} \Phi_{ij_s}^{t_s}$ où $\{t\}$ parcourt l'ensemble des $r$-uples d'entiers pour lesquels $|t|$ est strictement inférieur à $|m|$. Choisissons donc un ensemble de nombres complexes noté $(a_{\{t\}})_{\{t\} \in \mathbb{N}^r}$ pour lequel on a:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\bullet\ a_{\{t\}} = 0 \qquad \text{si } |t| \geqslant m; \\ &\bullet\ u = \sum_{\{t\} \in \mathbb{N}^2} a_{\{t\}} \Phi_{ij_1}^{t_1} \cdots \Phi_{ij_r}^{t_r}. \end{aligned}$$

Soit $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_r$; grâce à $\sigma$ on définit un élément, noté $w(\sigma)$ de $Gl_n(\mathbb{C})$ de la façon suivante: soit $e_1 \cdots e_n$ la base habituelle de la représentation naturelle de $Gl_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^n$, alors on pose:

$$w(\sigma)\, e_t = e_t \qquad \text{si } t \notin \{j\};$$

$$w(\sigma)\, e_{j_s} = e_{j_{\sigma(s)}} \qquad \text{si } j_s \in \{j\}.$$

L'élément $w(\sigma)$ agit dans $U(\mathfrak{g})$ par l'action adjointe et d'après I.10(4), on a, quelque soit l'entier $k$:

$$w(\sigma)\, \Phi_{it}^{k} = \Phi_{it}^{k} \qquad \text{si } t \notin \{j\},$$

$$w(\sigma)\, \Phi_{ij_s}^{k} = \Phi_{ij_{\sigma(s)}}^{k} \qquad \text{si } j_s \in \{j\}.$$

D'où par définition de $u$, puis en utilisant $(*)$,

$$w(\sigma)\, u = Y(i; \sigma\{j\}; \{m\}) - X(i; \sigma\{j\}; \{m\})$$

$$= \sum_{\{t\} \in \mathbb{N}^r} a_{\{t\}}\, \Phi_{ij_{\sigma(1)}}^{t_s} \cdots \Phi_{ij_{\sigma(r)}}^{t_r}.$$

D'après 0.(2) et I.16, on a:

$$w(\sigma)\,u=\varepsilon(\sigma)\,u.$$

D'où

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\varepsilon(\sigma)\,w(\sigma)\,u\\&=\frac{1}{r!}\sum_{\{t\}\in\mathbb{N}^r}a_{\{t\}}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\varepsilon(\sigma)\,\Phi^{t_1}_{ij_{\sigma(1)}}\cdots\Phi^{t_r}_{ij_{\sigma(r)}}\\&=\frac{1}{r!}\sum_{\{t\}\in\mathbb{N}^r}a_{\{t\}}\,Y(i;\{j\};\{t\}).\end{aligned}$$

C'est-à-dire l'assertion du lemme.

I.18. Corollaire. *Soient $i$ et $\{j\}$ des éléments de $E_1$ et $E_r$ respectivement; on suppose que tous les entiers du r-uple $\{j\}$ sont distincts de $i$, alors on a:*

$$X(i;\{j\})=Y(i;\{j\}).$$

C'est un corollaire immédiat de I.17 et I.14(3).

I.19. Lemme. *Soient $r$ un entier positif, $i$, $\{j\}$ et $(v,w)$ des éléments de $E_1$, $E_r$ et $E_2$ respectivement et $\{m\}$ un élément de $\mathbb{N}^r$; on suppose que $w$ est différent de $i$; alors on a:*

$$\begin{aligned}&[\,Y(i;\{j\};\{m\}),x_{vw}]\\&\quad=\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\,Y(i;wj_1\cdots\hat{j}_s\cdots j_r;\{m\})\,\delta_{vj_s}.\end{aligned}$$

C'est clair d'après I.10(4) et 0.(2).

I.20 Lemme. *Soient $r$ un entier positif, $\{m\}$ un élément de $\mathbb{N}^r$ et $i,v$ des éléments de $E_1$ et $\{j\}$ un élément de $E_r$; on suppose que tous les entiers du r-uple $\{j\}$ sont distincts de $i$, alors quel que soit l'entier $k$, il existe un ensemble de nombres complexes indépendant de $v$ et noté $a(s,\{m'\})$ où $s$ est un entier relatif et $\{m'\}$ un r-uple d'entier vérifiant*

$$|m'|<s+|m|\qquad et\qquad r(r+1)/2-|m|<s\leqslant k$$

$$\begin{aligned}u(v)&:=[\,Y(i;\{j\};\{m\}),\Phi^k_{iv}]\\&=\sum_{s,\{m'\}}a(s,\{m'\})\,\Phi^{k-s}_{iv}\,Y(i;\{j\};\{m'\}).\end{aligned}$$

On démontre d'abord le lemme pour $v$ égale $i$; d'après I.11 il existe un ensemble de nombres complexes, noté $(a_{s,\{m\}})_{s\in\mathbb{Z},\,\{m\}\in\mathbb{N}^r}$ pour lequel on a:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\bullet\ u(i)=\sum_{s\in\mathbb{Z},\,\{m'\}\in\mathbb{N}^r} a_{s,\{m'\}}\Phi_{ii}^{k-s}\,\Phi_{ij_1}^{m'_1}\cdots\Phi_{ij_r}^{m'_r},\\ &\bullet\ |m'|+k-s<k+|m|,\\ &\bullet\ s\leqslant k.\end{aligned}$$

Soit $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_r$; on définit $w(\sigma)$ comme dans la démonstration de I.17 et de manière analogue, on a:

$$w(\sigma)\,u(i)=[\,Y(i;\sigma\{j\};\{m\}),\Phi_{ii}^k]=\varepsilon(\sigma)\,u,$$

d'où avec $(*)$,

$$u(i)=\frac{1}{r!}\sum_{s\in\mathbb{Z},\,\{m'\}\in\mathbb{N}^r} a_{s,\{m'\}}\Phi_{ii}^{k-s}\,Y(i;\{j\};\{m'\}).$$

Si $s$ est inférieur ou égal à $r(r+1)/2-|m|$, on a (cf. $(*)$)

$$|m'|<r(r+1)/2$$

avec I.14(3), cela prouve que l'on a:

$$(**)\qquad u(i)=\frac{1}{r!}\sum_{s>r(r+1)/2-|m|,\,\{m'\}\in\mathbb{N}^r} a_{s,\{m'\}}\Phi_{ii}^{k-s}\,Y(i;\{j\};\{m'\}).$$

D'où le lemme dans ce cas; soit maintenant un élément $v$ de $E_1$ distinct de $i$; en utilisant I.10(4) et I.19, on a:

$$[u(i),x_{iv}]=[\,Y(i;\{j\};\{m\}),\Phi_{iv}^k]=u(v),$$

et avec $(**)$

$$u(v)=\frac{1}{r!}\sum_{s>r(r+1)/2-|m|,\,\{m'\}\in\mathbb{N}^r} a_{s,\{m'\}}\Phi_{iv}^{k-s}\,Y(i;\{j\};\{m'\}),$$

d'où le lemme.

I.21. Lemme. *Soient $r$ et $k$ des entiers positifs et $i$, $\{j\}$, $\{l\}$ des éléments de $E_1$, $E_r$ et $E_k$ respectivement; on suppose que tous les éléments des $r$-uples $\{j\}$ et $\{l\}$ sont distincts de $i$, alors on a*:

$$u:=[\,Y(i,\{j\}),Y(i;\{l\}]=0.$$

On démontre le lemme par récurrence sur $k$; si $k$ égale 1, il résulte de I.19. Supposons donc que $k$ est strictement plus grand que 1 et remarquons que d'après I.15(1), on a:

$$(-1)^{k-1} Y(i; \{l\}) = Y(i; \{l\}; k-1, ..., 1, k).$$

Avec l'hypothèse de récurrence, on a donc (cf. 0.(2))

$$u = \sum_{t=1}^{k} (-1)^t Y(i; \{l_1 \cdots \hat{l}_t l_k\})[Y(i, \{j\}), \Phi^k_{il_t}].$$

Grâce à I.20, cela montre que $u$ appartient au sous-$U(\mathfrak{g})$-module à droite de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $Y(i; \{l\}; k-1, ..., 1k-s)$ où $s$ est un entier positif; ces éléments étant nuls d'après I.14(1), le lemme est démontré.

I.22. *Remarque.* Soit $\tau$ l'antiautomorphisme (de Chevalley) de $U(\mathfrak{g})$ défini par:

$$\tau(x_{vw}) = x_{wv}.$$

Soient $r$ un entier positif et $(i, j)$ un élément de $E_2$ il est clair d'après les définitions que l'on a:

$$\tau\Phi^r_{ij} = \Phi^r_{ji},$$

d'où avec I.10(2) $\tau\Psi^r_{ij} = \Psi^r_{ji}$, et quels que soient les éléments $\{j\}$ de $E_r$ et $\{m\}$ de $\mathbb{N}^r$, on a:

$$\tau Y(i; \{j\}; \{m\}) = (-1)^{r(r-1)/2}\, Y(\{j\}; i; m_r m_{r-1} \cdots m_1).$$

Avec I.15(1), on obtient alors:

$$\tau Y(i; \{j\}) = Y(\{j\}; i).$$

De plus avec les mêmes notations et en utilisant I.16, on a:

$$\tau X(i; \{j\}) = X(\{j\}; i).$$

I.23. *Remarques.* (1) Soient $r$ un entier positif, $i$ et $\{j\}$ des éléments de $E_1$ et $E_r$ respectivement; on suppose que tous les entiers du $r$-uple $\{j\}$ sont distincts de $i$; alors grâce à I.10(2) et I.14(3) et la bilinéarité du déterminant, on voit que $Y(i, \{j\})$ est aussi le déterminant de la matrice $r \times r$, notée $(a_{vw})$ où l'on a:

$$a_{vw} = \Psi^{r-w+1}_{ij_v}.$$

Utilisant alors I.8(3) on en déduit que l'élément $Y(i, \{j\})$ de $U(\mathfrak{g})$ est nul si $r$ est supérieur ou égal à $n$.

(2) Sous les mêmes hypothèses que (1), mais en supposant de plus que $i$ égale 1, alors grâce à I.8(2) et (1), on voit que $Y(1; \{j\})$ est un élément de $U(\mathfrak{p})$. Plus généralement, sans utiliser (1) mais seulement I.10(2) et I.8(2), on voit que quel que soit le $r$-uple $\{m\}$, l'élément $Y(1; \{j\}; \{m\})$ appartient au sous $Z(\mathfrak{g})$-module de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $U(\mathfrak{p})$.

(3) Avec les notations et hypothèses de (2) et en utilisant I.19, on voit que le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{p})$ engendré par l'ensemble des éléments $Y(1; \{j\})$ où $\{j\}$ parcourt $E'_r$ (cf. notations 0.(3)) est un $\mathfrak{p}$-module irréductible.

I.24. Soit $k$ un entier positif inférieur ou égal à $n$; on note $\mathfrak{g}_k$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée en tant qu'espace vectoriel par l'ensemble des éléments $(x_{vw})_{k < v,\, w \leqslant n}$ (en particulier $\mathfrak{g}_n$ est nulle); il est clair que $\mathfrak{g}_k$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{p}$. On note $\Delta(k)$, ou $\Delta$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'élément $Y(1; k \cdots 2)$ de $U(\mathfrak{p})$ (cf. I.23(2)). Soit $m'(k)$ le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{p})$ engendré par l'ensemble des éléments $(x_{ij} - \delta_{i+1\,j})_{1 \leqslant i < k,\, i < j \leqslant n}$ (en particulier $m'(1)$ est nul) et on note $m(k)$ le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{p})$ engendré par $m'(k)$ et l'ensemble des éléments $(x_{kj})_{k < j \leqslant n}$.

I.25. Lemme (notations I.24). (1) *L'endomorphisme* ad $\Delta$ *de* $U(\mathfrak{p})$ *est localement nilpotent.*

(2) *Notons $S$ l'ensemble multiplicatif de $U(\mathfrak{p})$ engendré par $\Delta$, alors quel que soit l'idéal complètement premier, noté $J$, de $U(\mathfrak{p})$, $U(\mathfrak{p})/J$ admet une localisation en $S$, si $J$ ne contient pas $\Delta$.*

(1) D'après I.19 et I.21, on a, pour tout élément noté $x_{vw}$ de $\mathfrak{p}$:

$$(\operatorname{ad} \Delta)^2\, x_{vw} = 0.$$

(1) en résulte formellement et (2) résulte de (1) grâce à [BR, 2.2].

I.26 (notations de I.24 et I.25). On suppose que $k$ est plus grand que 1. On note $U(\mathfrak{p})_S$ la localisée de $U(\mathfrak{p})$ en $S$ et on définit une application, notée $\theta(k)$ (ou $\theta$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) de $\mathfrak{g}_k$ dans $U(\mathfrak{p})_S$ de la façon suivante:
Soit $x_{vw}$ un élément de $\mathfrak{g}_k$, on pose

$$\theta(x_{vw}) = x_{vw} + \sum_{t=2}^{k} (-1)^{k-t+1}\, x_{vt}\, Y(1; wk \cdots \hat{t} \cdots 2)\, \Delta^{-1}.$$

Remarquons que cette application ainsi que le lemme suivant sont déjà plus ou moins dans [N, appendice 1].

I.27. Lemme (notation I.26). (1) *L'application $\theta$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_k$ dans l'algèbre $U(\mathfrak{p})_S$.*

(2) *Soient $r$ un entier strictement inférieur à $k$ et $j$ un élément de $E'_r$; alors l'élément $Y(1; \{j\})$ de $U(\mathfrak{p})$, ainsi que $\Delta$, centralisent l'image de $\theta$.*

Démontrons d'abord (2). Soit $x_{vw}$ un élément de $\mathfrak{g}_k$; d'après I.19 et I.21, il est clair que $\Delta$ commute à $\theta(x_{vw})$ (car $v$ est strictement supérieur à $k$) et qu'il en est de même de $Y(1; \{j\})$ si $v$ n'est pas un des éléments du $r$-uple $\{j\}$. Supposons donc que $v$ égale $j_1$ et que tous les autres éléments de $\{j\}$ sont distincts de $v$ (ce qui suffit d'après 0.(2)). Avec I.19 et I.21 on obtient:

$$u := [Y(1; \{j\}), \theta(x_{vw})] = Y(1; wj_2 \cdots j_r)$$
$$+ \sum_{t=2}^{k} (-1)^{k-t+1} Y(1; tj_2 \cdots j_r)\, Y(1; wk \cdots \hat{t} \cdots 2)\, \Delta^{-1}.$$

Grâce à 0.(2) et I.18, on a:

$$u' := (-1)^{r-1} u\Delta = X(1; j_2 \cdots j_r w)\, \Delta$$
$$+ \sum_{t=2}^{k} (-1)^{k-t+1} X(1; j_2 - j_r t)\, Y(1; wk \cdots \hat{t} \cdots 2).$$

En en développant $X(\ )$ suivant la dernière colonne (cf. 0.(2)) on voit que $u'$ appartient au sous-$U(\mathfrak{p})$-module à gauche de $U(\mathfrak{p})$ engendré par l'ensemble des éléments suivants, où $s$ est un entier variant de 0 à $r-1$ (au sens large)

$$\Phi^{r-s}_{1w}\, \Delta + \sum_{r=2}^{k} (-1)^{k-t+1}\, \Phi^{r-s}_{1t}\, Y(1; wk \cdots \hat{t} \cdots 2)$$
$$= Y(1; wk \cdots 2; r-s, k-1, \cdots, 1) \qquad (\text{cf. } 0.(2)).$$

D'après I.14(1) et l'hypothèse faite sur $r$, ces éléments sont nuls ce qui termine la démonstration de (2).

Démontrons maintenant (1). Soient $x_{ij}$ et $x_{vw}$ des éléments tels que $k < i$, $j$, $v$, $w \leqslant n$; d'après (2) on sait déjà que l'on a:

$$u := [\theta(x_{ij}), \theta(x_{vw})]$$
$$= [x_{ij}, \theta(x_{vw})] + \sum_{r=2}^{k} (-1)^{k-t+1} [x_{it}, \theta(x_{vw})]\ Y(1; jk \cdots \hat{t} \cdots 2)\, \Delta^{-1}.$$

Soit $t$ un entier compris entre 2 et $k$ (au sens large); en utilisant I.19 et 0.(2), on a:

$$[x_{it}, \theta(x_{vw})] = [x_{it}, x_{vw}] + (-1)^{k-t+1}\, x_{vt}\, Y(1; t, k, \ldots, \hat{t} \cdots 2)\, \Delta^{-1}\, \delta_{iw} = 0.$$

D'où, en utilisant I.19 pour la dernière égalité:

$$u = [x_{ij}, \theta(x_{vw})] = \theta(x_{iw})\, \delta_{vj} - \theta(x_{vj})\, \delta_{iw};$$

c'est-à-dire l'assertion (1) du lemme.

I.28. Soient $(i, j)$ un élément de $E_2$ et $r$ un entier. On pose:

$$
\begin{aligned}
{}'\Phi^r_{ij} &= \delta_{ij}, && \text{si } r = 0 \\
&= \sum_{\{i\} \in E'_{r-1}} x_{ii_1} x_{i_1 i_2} \cdots x_{i_{r-1} j}, && \text{si } r \neq 0.
\end{aligned}
$$

Il est clair que l'on a:

(1) $$\Phi^r_{ij} = {}'\Phi^r_{ij} + \sum_{s=1}^{r-1} \Phi^{r-s}_{i1}\, {}'\Phi^s_{1j},$$

(2) $$\Phi^r_{ij} = {}'\Phi^r_{ij} + \sum_{s=1}^{r-1} {}'\Phi^{r-s}_{i1}\, \Phi^s_{1j},$$

(3) $${}'\Phi^r_{ij} \in U(\mathfrak{p}), \qquad \text{si } j \neq 1,$$

(4) $$\forall s \in \mathbb{N}, \qquad {}'\Phi^{r+s}_{ij} = \sum_{l=2}^{n} {}'\Phi^r_{il}\, {}'\Phi^s_{lj}.$$

Montrons aussi que l'on:

(5) $$\forall (v, w) \in E'_2, \qquad [{}'\Phi^r_{ij}, x_{vw}] = {}'\Phi^r_{iw}\, \delta_{vj} - {}'\Phi^r_{vj}\, \delta_{iw}.$$

En utilisant I.10(4) puis (1) on obtient

$$
\begin{aligned}
[\Phi^r_{ij}, x_{vw}] &= \Phi^r_{iw}\, \delta_{vj} - \Phi^r_{vj}\, \delta_{iw} \\
&= [{}'\Phi^r_{ij}, x_{vw}] + \sum_{s=1}^{r-1} (\Phi^{r-s}_{i1}\, [{}'\Phi^s_{1j}, x_{vw}] \\
&\qquad - (\Phi^{r-s}_{v1}\, {}'\Phi^s_{1j})\, \delta_{iw};
\end{aligned}
$$

la démonstration de (5) se fait alors par récurrence sur $r$, (5) étant trivial pour $r$ égal 0.

I.29. LEMME (notations de I.28). *Soient $j$ un élément de $E'_r$ et $t$ un entier positif inférieur ou égal à $r$.*

(1) *Les éléments de $U(\mathfrak{g})$ suivants coïncident: pour tout élément, noté $i$, de $E_1$:*

$$\sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1}\, \Phi^t_{ij_s}\, Y(1; j_1 \cdots \hat{j}_s, j_r),$$

*et*

$$\sum_{s=1}^{r} (-1)^{s-1}\, {}'\Phi^t_{ij_s}\, Y(1; j_1 \cdots \hat{j}_s \cdots j_r).$$

*En particulier ils sont dans $U(\mathfrak{p})$*

(2) *L'élément* $Y(1; \{j\})$ *de* $U(\mathfrak{p})$ *est aussi le déterminant de la matrice* $r \times r$, *notée* $(a_{rw})$ *où l'on a*:

$$a_{rw} = {}'\Phi^{r+1-w}_{1j_r}.$$

(1) résulte clairement de I.28(2) et I.14(1) puis de I.28(3) et I.23(2). Quant à (2) il se prouve par récurrence sur $r$ en utilisant (1) (où en fait $i$ égal 1).

I.30. Lemme (notations de I.28 et I.24). *On note* $\eta(r)$ *le nombre qui vaut* 1 *si* $r$ *est inférieur strictement à* $k$ *et* 0 *sinon alors on a, si* $j$ *est strictement supérieur à* $r$:

$$'\Phi^r_{1j} - \eta(r)\,\delta_{jr+1} \in U(\mathfrak{p})\,m(k).$$

Le lemme se démontre par récurrence sur $r$; il est clair par définition de $m(k)$ si $r$ égale 1. On suppose donc que $r$ est strictement supérieur à 1 et que le lemme est vrai jusqu'à $r-1$. On pose:

$$t = \inf(j-1, k).$$

D'après I.28(4) puis I.28(5), on a:

$$\begin{aligned} '\Phi^r_{1j} &= \sum_{l=2}^{n} {}'\Phi^{r-1}_{1l}\, x_{lj} \\ &= \sum_{l=t+1}^{n} x_{lj}\, {}'\Phi^{r-1}_{1l} + (n-t)\, {}'\Phi^{r-1}_{1j} + \sum_{l=2}^{t} {}'\Phi^{r-1}_{1l}\, x_{lj}. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence assure que l'on a:

- $'\Phi^{r-1}_{1j} \in U(\mathfrak{p})\,m(k)$ puisque $j > r$,
- $'\Phi^{r-1}_{1l} \in U(\mathfrak{p})\,m(k)$ si $l > t$ puisque soit $t$ est supérieur ou égal à $r$, soit $r$ est strictement supérieur à $k$.

De plus par définition de $m(k)$, si $l$ est inférieur ou égal à $t$, on a ($j$ étant supérieur strictement à $r$):

$$x_{lj} - \delta_{jl+1}\,\eta(r) \in U(\mathfrak{p})\,m(k);$$

d'où, avec ce qui précède:

$$'\Phi^r_{1j} - {}'\Phi^{r-1}_{1j-1}\,\eta(r) \in U(\mathfrak{p})\,m(k)$$

et l'hypothèse de récurrence termine la démonstration du lemme.

I.31. LEMME (notations de I.24 et I.30). *Soit* $\{j\}$ *un élément de* $E'_r$ *vérifiant*:

$$j_1 \geqslant \cdots \geqslant j_r.$$

*Alors on a*:

$$Y(1; \{j\}) - \eta(r) \prod_{s=1}^{r} \delta_{j_s, r-s+2} \in U(\mathfrak{p})\, m(k).$$

On remarque d'abord que le lemme est trivialement vrai si les entiers du $r$-uple $\{j\}$ ne sont pas tous distincts; on suppose donc qu'ils sont tous distincts ce qui entraîne en particulier que l'on a, pour tout $s$ compris entre 1 et $r$ au sens large:

$$j_s > r - s + 1.$$

Grâce à I.29(2), on exprime $Y(1; \{j\})$ comme le déterminant de la matrice $r \times r$ précisé dans ce lemme; puis on développe le déterminant suivant la dernière colonne en calculant les éléments de cette colonne modulo $U(\mathfrak{p})\, m(k)$ grâce à I.30; il reste au plus un seul terme, le mineur correspondant à $x_{1j_r}$ et il est multiplié par $\eta(r)\, \delta_{j_r 2}$ puis on recommence un calcul similaire avec ce mineur en utilisant I.30 et caetera.

I.32. COROLLAIRE. *L'élément* $\Delta(k) - 1$ *appartient à* $U(\mathfrak{p})\, m(k)$.

C'est un corollaire immédiat de I.31.

I.33 (notations de I.26). Grâce à I.26, on prolonge $\theta$ en un homomorphisme d'algèbres, encore noté $\theta$, de $U(\mathfrak{g}_k)$ dans $U(\mathfrak{p})_S$. En outre grâce à I.32, on voit facilement que l'on a:

- $U(\mathfrak{p})_S\, m(k) \cap U(\mathfrak{p}) = U(\mathfrak{p})\, m(k)$.
- $U(\mathfrak{p})/U(\mathfrak{p})\, m(k) \xhookrightarrow{\sim} U(\mathfrak{p})_S/U(\mathfrak{p})_S\, m(k)$.

Alors on note $\pi$ l'application naturelle de $U(\mathfrak{p})_S$ sur $U(\mathfrak{p})/U(\mathfrak{p})\, m(k)$ et on identifie $U(\mathfrak{g}_k)$ à un sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{p})/U(\mathfrak{p})\, m(k)$. Remarquons que, pour l'action adjointe, $\mathfrak{g}_k$ laisse stable $m(k)$. Il résulte alors facilement de I.31 que l'on a:

(1) $\pi \circ \theta$ *est le morphisme identité de* $U(\mathfrak{g}_k)$.

(2) *On note* $A(k)$ *la sous-algèbre de* $U(\mathfrak{p})_S$ *image de* $\theta$ *et d'après* (1) *et* I.26, $\theta$ *est un isomorphisme d'algèbres de* $U(\mathfrak{g}_k)$ *sur* $A(k)$.

I.34 (notations I.24). Soit $r$ un entier on note $E_r''$ le sous-ensemble de $E_r$ formé des $r$-uples d'entiers qui sont tous strictement supérieurs à $k$. Soit $(i, j)$ un élément de $E_2''$, on pose:

$$''\Phi_{ij}^r = \sum_{\{i\} \in E_{r-1}''} x_{ii_1} x_{i_1 i_2} \cdots x_{i_{r-1} j}.$$

Montrons que l'on a:

$$(1) \qquad '\Phi_{ij}^r - ''\Phi_{ij}^r \in U(\mathfrak{p})\, m(k).$$

En effet, soit $\{i\}$ un élément de $E_r'$; on note $m$ le plus grand entier, s'il existe, tel que le $m^{\text{ième}}$ élément du $r$-uple $\{i\}$ soit inférieur ou égal à $k$. Par choix de $m$, il est clair que l'élément suivant, $x_{ii_1} \cdots x_{i_{r-1} j}$, appartient au sous $U(\mathfrak{p})$-module à gauche de $U(\mathfrak{p})$ engendré par l'ensemble des éléments $(x_{i_m l})_{l > k}$.

L'assertion (1) résulte donc de la définition de $m(k)$. Supposons maintenant que $r$ est inférieur ou égal à $k$, alors il résulte immédiatement de I.27(1), I.30 et de (1) que l'on a:

$$(2) \qquad \Phi_{ij}^r - ''\Phi_{ij}^r \in U(\mathfrak{g})\, m(k).$$

Supposant encore que $r$ est inférieur ou égal à $k$, mais utilisant I.31, on a aussi grâce à 1:

$$(3) \qquad '\Phi_{ij}^r \Delta + \sum_{t=2}^{k} (-1)^{k-t+1}\, '\Phi_{it}^r\, Y(1; k \cdots \hat{t} \cdots 2) \in ''\Phi_{ij}^r + U(\mathfrak{p})\, m(k);$$

nous noterons d'ailleurs cet élément $\tilde{\Phi}_{ij}^r$ pour simplifier les notations. On posera, pour tout entier $r$ et tout élément $(i, j)$ de $E_2$:

$$(4) \qquad \tilde{\Phi}_{ij}^r = '\Phi_{ij}^r \Delta + \sum_{t=2}^{k} (-1)^{k-t+1}\, '\Phi_{it}^r\, Y(1; k \cdots \hat{t} \cdots 2),$$

et (3) devient donc (sous les hypothèses de I.31)

$$\forall (i, j) \in E_2'', \qquad r \leqslant k \qquad \tilde{\Phi}_{ij}^r - ''\Phi_{ij}^r \in U(\mathfrak{p})\, m(k).$$

Remarquons qu'avec ces notations, $\tilde{x}_{ij} := \tilde{\Phi}_{ij}^1$ coïncide avec $\theta(x_{ij})\, \Delta$ $(= \Delta\, \theta(x_{ij}))$ si $k+1 \leqslant j \leqslant n$.

## II

II.1. Dans cette section I est un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$; on va démontrer la conjecture de [Di1, 6.12] sous la forme plus précise suivante (*) on note $J$ l'intersection de $I$ et $U(\mathfrak{p})$ et $\bar{Z}$ l'image de $Z(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})/I$; alors le corps des fractions de $U(\mathfrak{g})/I$ coïncide avec le corps des fractions de $(U(\mathfrak{p})/J)\,\bar{Z}$.

Remarquons que la sous-algèbre $\mathfrak{p}$ ne coïncide pas avec la sous-algèbre $\mathfrak{p}_n$ de [Di1] mais comme on le signale en IV.2 (ci-après) cela ne fait pas beaucoup de différence. En outre, signalons comment le résultat annoncé plus haut entraîne que $J$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{p})$ si $I$ en est un; sous cette hypothèse $\bar{Z}$ est réduit à $\mathbb{C}$ et (*) donne un isomorphisme d'algèbres entre Fract $U(\mathfrak{p})/J$ et Fract $U(\mathfrak{g})/I$; cela entraîne que le centre de Fract $U(\mathfrak{p})/J$ est réduit au scalaire et d'après [Di2, Théorème c] que $J$ est primitif.

L'autre résultat important de ce section est la proposition II.20.

II.2. Rappelons la structure de l'ensemble des idéaux premiers de $U(\mathfrak{p})$ (cf. [Di1, 5]) et la notation de niveau introduite dans un cadre légèrement différent en [Di1]. Soit $J$ un idéal premier de $U(\mathfrak{p})$; on utilisera les notations de I.24; on note $\mathfrak{u}_1$ le radical unipotent de $\mathfrak{p}$ et $P$ le sous-groupe irréductible de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$. D'après [Di1, 5.1], deux cas sont possibles

- $J \cap U(\mathfrak{u}_1) = U(\mathfrak{u}_1)\,\mathfrak{u}_1$,
- $J \cap U(\mathfrak{u}_1) = 0$.

Dans le premier cas, on dit que $J$ est de niveau 1 et que la réduction de Mackey s'arrête, et on pose:

$$J^{\#} = J \cap U(\mathfrak{g}_1);$$

et on a:

$$J = J + U(\mathfrak{p})\,m(1) = \bigcap_{\gamma \in P} \gamma(J^{\#} + U(\mathfrak{p})\,m(1)); \dim U(\mathfrak{p})/J = \dim U(\mathfrak{g}_1)/J^{\#}.$$

Dans le deuxième cas, on pose:

$$P_1 = \mathrm{Stab}_P m'(2)$$

$$\mathfrak{p}_1 = (\mathrm{Lie}\ P_1 \cap \mathfrak{g}_1)$$

$$J_1 = (J + U(\mathfrak{p})\,m'(2)) \cap U(\mathfrak{p}_1).$$

Il est clair que $P_1$ est connexe. En outre l'algèbre de Lie de $P_1$ est $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{u}_1$. D'après [Di2] on sait que $J$ est induit par un idéal premier de $U(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{u}_1)$ (donc $P_1$ stable) et d'après [MR] cet idéal est unique et il vaut:

$$(J + U(\mathfrak{p})\,m'(2)) \cap U(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{u}_1),$$

c'est-à-dire:

$$J_1 + U(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{u}_1)\, m'(2).$$

Il est alors clair que $J_1$ est un idéal premier de $U(\mathfrak{p}_1)$.

En fait, on retrouve facilement ce résultat en montrant (cf. [N]) que la sous-algèbre de Fract $U(\mathfrak{p})$ obtenu en localisant $U(\mathfrak{p})$ en l'ensemble multiplicatif engendré par $x_{12}$ est le produit tensoriel d'une algèbre de Weyl et d'une algèbre notée $A$ isomorphe à $U(\mathfrak{p}_1)$ et que $J_1$ est l'image par cet isomorphisme de $J \cap A$; on trouve alors aussi que l'on a:

$$\dim U(\mathfrak{p}_1)/J_1 = \dim U(\mathfrak{p})/J + 2(n-1),$$

en outre (d'après [Di3, 5.6.3; Di2, Théorème A] et l'unicité de $J_1$), $J_1$ est primitif si et seulement si $J$ est primitif. Remarquons que $\mathfrak{p}_1$ est de la même forme que $\mathfrak{p}$ (i.e., est l'algèbre de Lie du groupe affine de $\mathbb{C}^{n-2}$); sauf si $n$ est égal à 2, on recommence avec $J_1$ et $\mathfrak{p}_1$ ce qui a été fait avec $J$ et $\mathfrak{p}$. Supposons que $n$ est égal à 2, alors $J_1$ et $J$ sont nuls et on dit que $J$ est de niveau 2 et que $J^{\#}$ est nul (et la réduction de Mackey s'arrête).

Ainsi de proche en proche on voit que la réduction de Mackey peut s'arrêter de 2 façons:

($\alpha$) Soit il existe un entier $k$ strictement inférieur à $n$ tel que l'on ait:

Soit $J^{\#}$ l'idéal de $U(\mathfrak{g}_k)$ qui vaut

$$J^{\#} = (J + U(\mathfrak{p})\, m(k)) \cap U(\mathfrak{g}_k) \tag{1}$$

alors $J^{\#}$ est l'unique idéal de $U(\mathfrak{g}_k)$ pour lequel on ait

$$J = \bigcap_{\gamma \in p} \gamma U(\mathfrak{p})(J^{\#} + U(\mathfrak{p})\, m(k)) \tag{2}$$

on dit que $k$ est le niveau de $J$ et que $J^{\#}$ est l'idéal dérivé de $J$.

($\beta$) Soit $J$ est induit par l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{p})$ engendré par l'ensemble des éléments $(x_{ij} - \delta_{i+1,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$. Cet idéal coïncide nécessairement avec l'idéal 0 puisque 0 est un idéal premier de $U(\mathfrak{p})$ qui ne vérifie clairement pas ($\alpha$). Pour unifier les résultats on dit que l'idéal $J$, égal à 0, est de niveau $n$ et que son idéal dérivé est 0, et dans tous les cas on a: (1) et (2) puisque $\mathfrak{g}_n$ est nulle et $m(n)$ coïncident avec $m'(n)$ d'où

(3) La donnée de $J$ est équivalente à la donnée de $k$ et $J^{\#}$ grâce à (1) et (2).

De plus grâce à (1) et I.33(1) et (2), on a, avec les notations de I.33:

$$J^{\#} = \theta^{-1}(A(k) \cap JU(\mathfrak{p})_S);$$

$$\dim U(\mathfrak{g}_k)/J^{\#} = \dim U(\mathfrak{p})/J - 2(k-1)\, n + k(k-1). \tag{4}$$

(5) Ainsi $J^{\#}$ est un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g}_k)$ si $J$ est un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{p})$. De plus $J$ est primitif si et seulement si $J^{\#}$ est primitif.

II.3. DÉFINITIONS, NOTATIONS. Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$; soient $k$ un entier compris entre 1 et $n$ au sens large et $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g}_k)$ (cf. notations I.24), alors on dit que $I$ est de niveau $k$ et a $I^{\#}$ pour idéal dérivé si $I \cap U(\mathfrak{p})$ est de niveau $k$ et à $I^{\#}$ pour idéal dérivé au sens de II.2. Remarquons (cf. II.2(3), (4), (5)), que l'on a:

(1) $k$ et $I^{\#}$ déterminent uniquement $I \cap U(\mathfrak{p})$ et $I \cap U(\mathfrak{p})$ est primitif si et seulement si $I^{\#}$ est primitif;

(2) $$I^{\#} = (I \cap U(\mathfrak{p}) + U(\mathfrak{p})\, m(k)) \cap U(\mathfrak{g}_k);$$

(3) $$I \cap U(\mathfrak{p}) = \bigcap_{\gamma \in P} \gamma(U(\mathfrak{p})\, I^{\#} + U(\mathfrak{p})\, m(k));$$

(4) $$\dim U(\mathfrak{g}_k)/I^{\#} = \dim U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}) - (2n-k)(k-1).$$

Dans les deux cas triviaux $n=1$ ou $n=0$, $k$ et $I^{\#}$ sont nuls par convention.

II.4. PROPOSITION. *Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$; alors $I$ est de niveau $k$ si et seulement si $k$ est le plus grand entier pour lequel il existe un $k$-uple d'entiers tous distincts noté $\{j\}$ compris entre 2 et $n$ au sens large vérifiant*:

$$Y(1; \{j\}) \in I \cap U(\mathfrak{p}).$$

*En outre si $I$ est de niveau $k$, alors on a*:

$$\forall \{j\} \in E'_k, \qquad Y(1; \{j\}) \in I \cap U(\mathfrak{p}).$$

Cette proposition est essentiellement [Di1, 6.8]. Redonnons-en une démonstration; d'après I.23(1) et (2) on sait qu'il existe un entier $r$ compris entre 1 et $n$ (au sens large) et un élément de $E'_r$ formé d'entiers tous distincts, noté $\{j\}$, pour lequel on a:

$$Y(1; \{j\}) \in I \cap U(\mathfrak{p}).$$

Choisissons $r$ minimum pour cette propriété; d'après I.23(3), on sait que quelque soit l'élément de $E'_r$, noté $\{j'\}$, on a alors aussi:

(1) $$Y(1; \{j'\}) \in I \cap U(\mathfrak{p}).$$

Notons $k$ le niveau de $I$ et montrons d'abord que $r$ est supérieur ou égal à $k$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; notons $\{j\}$ le $r$-uple $(r+1 \cdots 2)$ d'après I.31, puis (1), on a:

$$Y(1; \{j\}) - 1 \in U(\mathfrak{p})\, m(k),$$

$$1 \in (I \cap U(\mathfrak{p}) + U(\mathfrak{p})\, m(k)). \tag{2}$$

Il est clair que $k$ doit être strictement inférieur à $n$ et avec II.3(2) et (2), on obtient que $I^{\#}$ contient 1 ce qui donne la contradiction cherchée.

Pour finir la démonstration de la proposition, il suffit donc de démontrer que le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des éléments $Y(1; \{j\})$ où $\{j\}$ parcourt $E'_k$ est inclus dans $I \cap U(\mathfrak{p})$; or, d'après I.23(3), cet espace vectoriel est ad $\mathfrak{p}$-stable et il suffit donc grâce à II.3(3) de démontrer que l'on a:

$$\forall \{j\} \in E'_k, \qquad Y(1; \{j\}) \in U(\mathfrak{p})\, m(k).$$

Cela résulte clairement de I.31. D'où la proposition.

II.5. Corollaire. *Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$, alors $I$ est de niveau $k$ si et seulement si $k$ est le plus petit entier pour lequel il existe un entier $i$ compris entre 1 et $n$ au sens large et un $k$-uple d'entiers, noté $\{j\}$ tous distincts compris entre 1 et $n$ au sens large et tous différents de $i$, pour lesquels on a*:

$$Y(i; \{j\})\, Y(\{j\}; i) \in I.$$

*De plus si $I$ est de niveau $k$ quels que soient $i$ et $\{j\}$ tels que $\{j\}$ soit un $k$-uple d'entiers ne contenant pas $i$, on a: $Y(i, \{j\})$ et $Y(\{j\}; i)$ appartient à $I$.*

Soient $r$ un entier positif, $i$ et $\{j\}$ des éléments de $E_1$ et $E_r$ respectivement; on suppose que tous les entiers du $r$-uple $\{j\}$ sont distincts et différents de $i$ et que l'on a:

$$Y(i; \{j\})\, Y(\{j\}, i) \in I. \tag{1}$$

D'après II.4, il suffit de démontrer que $r$ est supérieur ou égal à $k$ pour prouver la première partie du corollaire. Comme $I$ est un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$, de (1) on déduit que l'un des deux éléments $Y(i; \{j\})$ et $Y(\{j\}, i)$ est dans $I$. D'après I.22 et avec les notations de I.22, on a:

$$\tau Y(i; \{j\}) = Y(\{j\}, i).$$

Or d'après [D, corollaire 2], l'idéal $I$ de $U(\mathfrak{g})$ en tant qu'espace vectoriel est stable par $\tau$; cela montre que (1) est équivalente à l'assertion:

$$Y(i; \{j\}) \in I \qquad \text{et} \qquad Y(\{j\}; i) \in I. \tag{*}$$

Supposons en outre, ce qui ne restreint pas la généralité, que $j_r$ est le plus petit élément du $r$-uple $j$; supposons d'abord que $j_r$ est strictement plus grand que 1, alors on a, d'après I.10(4):

$$[x_{1i}, Y(i; \{j\})] = Y(1; \{j\})$$

et $r$ est supérieur ou égal à $k$ d'après II.4. Supposons maintenant que $j_r$ égale 1; on note $w$ l'élément de $Gl_n(\mathbb{C})$ défini de la façon suivante:

$w$ est la matrice de permutation échangeant 1 et $i$ et laissant stable les autres éléments.

Soit $\sigma$ l'élément de $\mathfrak{S}_n$ qui est la transposition échangeant 1 et $i$; d'après I.10(4) le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $(\Phi^r_{ab})_{(a,b)\in E_2}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}$ par l'application qui à $\Phi^r_{ab}$ associe $x_{ab}$, isomorphisme compatible à l'action adjointe de $Gl_n(\mathbb{C})$ dans $U(\mathfrak{g})$. D'où, avec les notations précédentes, on a:

$$w\Phi^r_{ab} = \Phi^r_{\sigma(a)\sigma(b)}.$$

et

$$wY(i; \{j\}) = Y(1; j_1 \cdots j_{r-1} i).$$

Le fait que $r$ est supérieur ou égal à $k$, résulte donc de II.4. On termine la démonstration du lemme en appliquant à (*) un élément de $Gl(n, \mathbb{C})$ "représentant" un élément de $\mathfrak{S}_n$ (comme précédemment) et en remarquant que $Y(i; \{j\}) = Y(\{j\}; i) = 0$, si les entiers du $k$-uple $\{j\}$ ne sont pas tous distincts.

II.6. Proposition. *Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ de niveau $k$, alors il existe un ensemble d'éléments, noté $(u_0, \ldots, u_k)$ de $U(\mathfrak{g})$ tel que l'on ait*:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad \sum_{s=0}^{k} u_s \Phi_{ij}^{k-s} \in I \\ &u_0 \notin I. \end{aligned}$$

*En particulier $u_0^{-1} u_s$ s'identifie naturellement quel que soit $s$ à un élément du corps des fractions de $U(\mathfrak{g})/I$ (noté $Q$) et l'on a aussi*:

(2) *il existe un unique ensemble $(v_1, \ldots, v_k)$ formé d'éléments de $Q$ vérifiant*: $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\sum_{s=0}^{k} v_s \Phi_{ij}^{k-s} = 0$ *dans $Q$, où $v_0 = 1$.*

*Il est en outre constitué d'éléments centraux de $Q$.*

Cette proposition est une proposition clé, mais malheureusement, elle nécessite beaucoup de calculs qui seront terminés en II.13. Dans ce paragraphe nous allons montrer comment, admettant (1), on en déduit (2) et nous allons faire quelques réductions.

Soient $(u_s)_{0 \leqslant s \leqslant k}$ et $(u'_s)_{0 \leqslant s \leqslant k}$ des ensembles d'éléments vérifiant (1). Soient $\bar{u}_0$ et $\bar{u}'_0$ les images de $u_0$ et $u'_0$ dans $U(\mathfrak{g})/I$. Comme $I$ est un idéal complètement premier, l'ensemble multiplicatif $U(\mathfrak{g})/I - \{0\}$ vérifie les conditions de Ore, il existe donc des éléments notés $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ de $U(\mathfrak{g})/I - \{0\}$ pour lesquels on a:

$$\bar{x}\bar{u}_0 = \bar{x}'\bar{u}'_0.$$

On choisit des éléments notés $x$ et $x'$, de $U(\mathfrak{g})$ dont les images dans $U(\mathfrak{g})/I$ sont $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ respectivement. On a donc:

$$xu_0 - x'u'_0 \in I.$$

D'où:

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n; \qquad \sum_{s=1}^{k} (xu_s - x'u'_s)\, \Phi_{ij}^{k-s} \in I.$$

Notons $r$ le plus petit entier s'il existe pour lequel on a:

$$xu_r - x'u'_r \notin I. \tag{3}$$

Supposons d'abord que $r$ existe; il est clair qu'alors $r$ doit être strictement inférieur à $k$ et que l'on a:

$$\forall j > 1 \qquad \sum_{s=r}^{k-1} (xu_s - x'u'_s)\, \Phi_{1j}^{k-s} \in I.$$

Grâce à I.15(2) cela entraîne, que l'ensemble des éléments $Y(1; \{j\})$ où $\{j\}$ parcourt $E'_{k-r}$ est inclus dans $I$. Puisque $r$ est strictement supérieur à 0, cela contredit II.4.
Ainsi l'on a:

$$\forall 1 \leqslant s \leqslant k, \qquad xu_s - x'u'_s \in I;$$

d'où quelque soit $s$ comme précédemment, on a dans $Q$:

$$\bar{u}_0^{-1}\, \bar{u}_s = \bar{u}_0^{-1}\, x^{-1}\bar{x}\bar{u}_s = \bar{u}_0'^{-1}\bar{x}'^{-1}\bar{x}'\bar{u}'_s = \bar{u}_0'^{-1}\bar{u}'_s;$$

d'où l'assertion d'unicité en (2).

La fin de (2), se déduit immédiatement de l'assertion d'unicité précédente et de I.10(4).

Montrons maintenant qu'il suffit de prouver l'existence d'un ensemble d'éléments, noté $(u_s)_{0 \leqslant s < k}$ vérifiant:

$$(4) \qquad \sum_{s=0}^{k-1} u_s \Phi_{1j}^{k-s} \in I, \qquad \forall j > 1,$$

$$(5) \qquad u_0 \notin I,$$

(6) les éléments $u_0^{-1} u_s$ de $Q$ (où $s$ varie de 1 à $k-1$ bornes incluses) sont dans le centre de $Q$.

En effet admettons (4), (5) et (6) et démontrons (1); soit $u$ un élément de $U(\mathfrak{g})$, alors on note $\bar{u}$ l'image de $u$ dans $U(\mathfrak{g})/I$; on pose, pour tout élément $(i, j)$ de $E_2$

$$(7) \qquad y_{ij} = \sum_{s=0}^{k-1} u_s \Phi_{ij}^{k-s}.$$

Soit $(i, j)$ un élément de $E_2$ tel que $i$ soit différent de $j$ et $j$ soit différent de 1; alors on a dans $Q$, avec les notations (7) et avec (4), I.10(4) et (5):

$$0 = [\bar{x}_{i1}, \bar{u}_0^{-1} \bar{y}_{1j}] = \bar{u}_0^{-1} \bar{y}_{ij};$$

d'où aussi avec I.10(4) et (6)

$$0 = [\bar{u}_0^{-1} \bar{y}_{ij}, \bar{x}_{j1}] = \bar{u}_0^{-1} \bar{y}_{i1},$$
$$0 = [\bar{u}_0^{-1} \bar{y}_{ij}, \bar{x}_{ji}] = \bar{u}_0^{-1} (\bar{y}_{ii} - \bar{y}_{jj});$$

d'où

$$(8) \qquad y_{ij} \in I, \qquad \forall i \neq j,$$

$$(9) \qquad y_{ii} - y_{jj} \in I, \qquad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Posons

$$u_k = -y_{11}.$$

Avec (8) et (9), on a donc:

$$\sum_{s=0}^{k} u_s \Phi_{ij}^{k-s} \in I, \qquad \forall i, j,$$

c'est-à-dire (1).

Dans les paragraphes suivants nous allons démontrer (4), (5) et (6), mais auparavant nous allons donner quelques notations et conventions:

II.7. NOTATIONS, CONVENTIONS. Jusqu'en II.13 on note de la même façon un élément de $U(\mathfrak{g})$ et son image dans $Q$ et jusqu'en II.12, on travaille dans $Q$, ce qu'on rappelera dans tous les énoncés des lemmes mais pas dans les démonstrations. On note $Z$ l'image de $Z(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})/I$. Remarquons que d'après I.18 et II.4, on a, dans $Q$:

$$X(1;2,...,k) = Y(1;2\cdots k) \neq 0.$$

On pose:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\delta(0)=1 \\ &1 \leqslant s < k,\ \delta(s) = (-1)^s X(1;2\cdots k)^{-1} X(1;2\cdots k; k\cdots \widehat{k-s}\cdots 1). \end{aligned}$$

D'après I.23(2), ces éléments sont dans $(\text{Fract } U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}))\, Z$. En outre d'après II.4 et I.18 puis 0.2, on a dans $Q$:

$$\begin{aligned} \forall j > 1, \qquad 0 &= Y(1;2\cdots kj) = X(1;2\cdots kj) \\ &= \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^{k+s} X(1;2\cdots k; k\cdots \widehat{k-s}\cdots 1)\, \Phi^{k-s}_{1j}; \end{aligned}$$

d'où aussi dans $Q$ (avec (1)):

$$\text{(2)} \qquad 0 = \sum_{s=0}^{k-1} \delta(s)\, \Phi^{k-s}_{1j}, \qquad \forall j > 1.$$

Ainsi pour prouver II.6, d'après la réduction faite à la fin de ce paragraphe II.6, il suffit de démontrer que les éléments $\delta(s)$ sont dans le centre de $Q$.

Donnons encore une notation, dans $Q$:

$$\text{(3)} \qquad \forall i > 1, \forall s \geqslant 1, \qquad {}^i\delta(s) := [x_{i1}, \delta(s)].$$

Le lemme qui suit va montrer qu'il suffit de prouver la nullité de tous ces éléments ${}^i\delta(s)$ ce qui sera fait en exhibant suffisamment de relations entre les ${}^i\delta(s)$, où $i$ varie de 2 à $n$ et $s$ de 1 à $k-1$, pour pouvoir les résoudre.

II.8. LEMME. *Dans $Q$, on a les propriétés suivantes pour tout entier $s$ inférieur strictement à $k$:*

$$\text{(1)} \qquad [x_{11}, \delta(s)] = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad \forall x_{vw} \in \mathfrak{p}, \qquad [x_{vw}, \delta(s) = 0,$$

$$\text{(3)} \qquad \forall (i,j) \in E'_2, \qquad [x_{ji}, {}^i\delta(s)] = {}^j\delta(s).$$

En fait (1) est clair par définition de $\delta(s)$ mais (1) résulte aussi de (2) puisque l'élément $\sum_{l=1}^{n} x_{ll}$ est dans le centre de $\mathfrak{g}$. Montrons (2):

Soit $x_{vw}$ un élément de $\mathfrak{p}$ et appliquons ad $x_{vw}$ à II.7(2); en utilisant I.10(4), on obtient pour tout entier $j$ strictement compris entre 1 et $n+1$:

$$0=\sum_{s=1}^{k-1}[x_{vw},\delta(s)]\,\Phi_{1j}^{k-s}-\sum_{s=0}^{k-1}\delta(s)\,\Phi_{1w}^{k-s}\,\delta_{vj}.$$

D'où encore, avec II.7(2):

$$(*)\qquad \sum_{s=1}^{k-1}[x_{vw},\delta(s)]\,\Phi_{1j}^{k-s}=0,\qquad \forall j>1.$$

Grâce à I.15(2), on obtient

$$[x_{vw},\delta(1)]\;Y(1;\{j\})=0,\qquad \forall j\in E'_{k-1}$$

et avec II.4, cela donne:

$$[x_{vw},\delta(1)]=0.$$

Revenant à $(*)$, on obtient aussi:

$$\sum_{s=2}^{k-1}[x_{vw},\delta(s)]\,\Phi_{1j}^{k-s}=0$$

et (2) se démontre de proche en proche en utilisant toujours I.15(2) et II.4.

(3) est une conséquence immédiate de (2) et des définitions.

II.9. Corollaire. *Dans $Q$, on a*:

$$[\Phi_{1j}^{r},\delta(s)]=0,\qquad \forall j,s,r\geqslant 1.$$

Remarquons que grâce à I.10, I.7, I.8(2) et I.8(3), on sait que l'élément $\Phi_{1j}^{r}$ est quel que soit l'entier $j$ de $E_1$ un élément du sous-$Z$-module de $U(\mathfrak{g})/I$ engendré par $U(\mathfrak{p})/I\cap U(\mathfrak{p})$; ainsi II.9 est un corollaire immédiat de II.8(2).

II.10. Lemme. *Soient $r$ un entier positif et $s$ un entier compris entre* 1 *et* $k-1$ *au sens large, alors on a dans $Q$*:

$$(1)\qquad \sum_{i=2}^{n}\Phi_{1i}^{r}\,{}^{i}\delta(s)=0;$$

$$(2)\qquad \forall\{j\}\in E'_r,\ \forall i>1,\qquad [Y(1;\{j\}),{}^{i}\delta(s)]=0.$$

(1) Grâce au corollaire II.9, on a pour tout élément $i$ de $E'_1$

$$\Phi_{1i}^{r}[x_{i1},\delta(s)]=[\Phi_{1i}^{r}x_{i1},\delta(s)],$$

d'où, en utilisant I.10(1):

$$\sum_{i=2}^{n} \Phi^r_{1i}\, {}^i\delta(s) = [\Phi^{r+1}_{11} - \Phi^r_{11}\, x_{11}, \delta(s)];$$

et (1) résulte alors de II.9.

(2) se prouve par récurrence sur $r$; supposons d'abord que $r$ égale 1, alors on a, quel que soit l'élément $j$ de $E'_1$:

$$[x_{1j}, {}^i\delta(s)] = [x_{1j}, [x_{i1}, \delta(s)]] = [x_{11}, \delta(s)]\,\delta_{ij} - [x_{ij}, \delta(s)];$$

et (2) est vrai dans ce cas grâce à II.8. Supposons maintenant que $r$ est strictement plus grand que 1 et que (2) soit vrai jusqu'à $r-1$; on fixe un élément noté $\{j\}$ de $E'_r$ et on pose pour $t$ un entier compris entre 1 et $r$ au sens large:

$$Y_t = (-1)^{t-1}\, Y(1; j_1 \cdots \hat{j}_t \cdots j_r).$$

Par définition, on a (cf. 0.(2))

$$Y(1; \{j\}) = \sum_{t=1}^{r} \Phi^r_{1j_t}\, Y_t. \tag{3}$$

En outre, grâce à I.10(4) et II.9, on a:

$$\forall j > 1, \qquad [\Phi^r_{1j}, {}^i\delta(s)] = [\Phi^r_{1j}, [x_{i1}, \delta(s)]] = -[\Phi^r_{ij}, \delta(s)].$$

D'où avec (3) et l'hypothèse de récurrence:

$$u := [Y(1; \{j\}), {}^i\delta(s)] = -\sum_{t=1}^{r} [\Phi^r_{ij_t}, \delta(s)]\, Y_t.$$

Puis, en utilisant I.23(2), on obtient:

$$u = -\sum_{t=1}^{r} [\Phi^r_{ij_t}\, Y_t, \delta(s)].$$

Le résultat résulte alors de I.29(1) et II.8(2).

II.11. Lemme. *Dans $Q$, on a pour tout élément $i$ de $E'_1$:*

$${}^i\delta(1) = 0.$$

Si $k$ égale $n$, II.11 résulte immédiatement de II.10(1) (avec $s$ égal à 1), I.15(2) et II.4; supposons donc que $k$ est strictement inférieur à $n$.

Soit $i$ un entier strictement supérieur à 2; on applique ad $x_{i1}$ à II.7(2), où on fait $j$ égal à 2; on obtient grâce à I.10

$$f(i):=\sum_{s=1}^{k-1} {}^{i}\delta(s)\,\Phi_{12}^{k-s}+\sum_{s=0}^{k-1}\delta(s)\,\Phi_{i2}^{k-s}=0.$$

On fixe un entier, noté $w$, strictement supérieur à $k$ et inférieur ou égal à $n$ et on pose:

$$\mathscr{E}=\{3,4,\ldots,k\} \qquad (\mathscr{E}=\varnothing \text{ si } k=2),$$

$$f(1):=\sum_{s=0}^{k-1}\delta(s)\,\Phi_{12}^{k-s} \qquad (=0),$$

$$\mathscr{F}=\mathscr{E}\cup\{w\}.$$

Pour obtenir des relations entre les ${}^{i}\delta(s)$ où $i$ varie dans $\mathscr{E}$ et $s$ varie comme précédemment, on calcule l'élément (nul) de $Q$ suivant:

$$f:=f(1)\,Y(3\cdots kw;2)+\sum_{i\in\mathscr{E}}(-1)^{i}f(i)\,Y(1;\hat{2}\cdots\hat{\imath}\cdots kw;2)$$
$$+(-1)^{k-1}f(w)\,Y(1;\hat{2}\cdots k;2).$$

Or on a pour tout entier $s$ comme précédemment:

$$\Phi_{12}^{k-s}\,Y(3\cdots kw;2)+\sum_{i\in\mathscr{E}}(-1)^{i}\,\Phi_{i2}^{k-s}\,Y(1;\hat{2}\cdots\hat{\imath}\cdots kw;2)$$
$$+(-1)^{k-1}\,\Phi_{w2}^{k-s}\,Y(1;\hat{2}\cdots k;2)$$
$$=Y(1;\hat{2}\cdots kw;2;k-s\,k-1\cdots 1).$$

D'après I.22 et I.14(1) si $s$ est positif et II.5 si $s$ est nul, on sait que tous ces éléments sont nuls dans $Q$. D'où finalement

$$(1)\qquad 0=f=\sum_{s=1}^{k-1}\left(\sum_{i\in\mathscr{E}}(-1)^{i}\,{}^{i}\delta(s)\,\Phi_{12}^{k-s}\,Y(1\cdots\hat{2}\cdots\hat{\imath}kw;2)\right.$$
$$\left.+(-1)^{k-1}\,{}^{w}\delta(s)\,\Phi_{12}^{k-s}\,Y(1;\hat{2}\cdots k;2)\right).$$

Remarquons que si $k$ est égal à 2, on a terminé la démonstration du lemme puisqu'alors on a:

$$0=f=-{}^{w}\delta(1)(x_{12})^{2}, \qquad \forall w>2$$

d'où avec II.8(3)

$$^{w}\delta(1)=0, \qquad \forall w>1.$$

Revenons au cas général où il faut obtenir d'autres relations; pour cela, on va appliquer à $f$ les endomorphismes suivants de $Q$: soient $m_3,..., m_k$ des entiers relatifs, on pose:

- $|m| = \sum_{t=3}^{k} m_t$;
- $\nabla(m_3 \cdots m_k)=0$, si l'un des $m_i$ est négatif,
  $\nabla(m_3 \cdots m_k)=(-1)^{|m|} \prod_{t=3}^{k} (\operatorname{ad} x_{2t})^{m_t}/m_t!$, sinon.

On pose aussi:

$$f(m_3 \cdots m_k)=\nabla(m_3 \cdots m_k)f.$$

Avant de calculer $f(m_3 \cdots m_k)$ faisons quelques remarques sur $\nabla(m_3 \cdots m_k)$:

- ad $x_{2t}$ commute à ad $x_{2s}$ quel que soit $s$ et $t$ compris entre 3 et $k$;
- soient $u$ et $y$ des éléments de $Q$ pour lesquels on a:
  $(\operatorname{ad} x_{2t})(\operatorname{ad} x_{2s})(\operatorname{ad} x_{2v})\, u=0$, $\forall t, s, v \in [3, k]$,

alors on a:

$$(2)\ \nabla(m_3 \cdots m_k)(uy)$$
$$= -\sum_{t=3}^{k} (\operatorname{ad} x_{2t}(u))\, \nabla(m_3 \cdots m_t-1 \cdots m_k)(y)$$
$$+ \sum_{3 \leqslant s<t \leqslant k} (\operatorname{ad} x_{2t} \operatorname{ad} x_{2s}(u))\, \nabla(m_3 \cdots m_s-1 \cdots m_t-1 \cdots m_k)(y)$$
$$+ \sum_{t=3}^{k} 1/2((\operatorname{ad} x_{2t})^2(u))\, \nabla(m_3 \cdots m_t-2 \cdots m_k)(y).$$

(Cela peut se voir directement par la règle de Leibnitz ou utiliser une récurrence sur $|m|$.) On pose (cf. I.22 et I.18)

- $\forall i \in \mathscr{E}, \qquad X_i=(-1)^i X(1; \hat{2} \cdots \hat{\imath} \cdots kw; 2)$
  $(=(-1)^i Y(1; \hat{2} \cdots \hat{\imath} \cdots kw; 2))$,
- $X_w(-1)^{k-1} X(1; \hat{2} \cdots k; 2)\ (=(-1)^{k-1} Y(1; \hat{2} \cdots k; 2))$.

En utilisant (1), (2) deux fois, II.8(3) et I.10(4), on obtient:

$$(3)\quad f(m_3\cdots m_k)=\sum_{s=1}^{k-1}\Bigg(\sum_{i\in\mathscr{F}}{}^i\delta(s)\Bigg(\Phi_{12}^{k-s}\nabla(m_3\cdots m_k)X_i + \sum_{t=3}^{k}\Phi_{1t}^{k-s}\nabla(m_3\cdots m_t-1\cdots m_k)X_i\Bigg) - {}^2\delta(s)\sum_{t=3}^{k}\Bigg(\Phi_{12}^{k-s}\nabla(m_3\cdots m_t-1\cdots m_k)X_t + \sum_{r=3}^{k}\Phi_{1r}^{k-s}\nabla(m_3\cdots m_r-1\cdots m_t-1\cdots m_k)X_t\Bigg)\Bigg),$$

où on a fait la convention suivante:

(*) $\nabla(m_3\cdots m_s-1\cdots m_t-1\cdots m_k)$ vaut $\nabla(m_3\cdots m_t-1\cdots m_s-1\cdots m_k)$ si, en fait, $s$ est supérieur à $t$ et $\nabla(m_3\cdots m_t-2\cdots m_k)$ si $s$ est égal à $t$.

On va maintenant faire des combinaisons des éléments $f(m_3\cdots m_k)$ en remarquant que l'on a:

$$(4)\qquad \nabla(m_3\cdots m_k)X_i=0 \quad \text{si } i\in\mathscr{E} \text{ et } |m|<2(k-1), \quad \text{ou si } i=w \text{ et } |m|\leqslant 2(k-2).$$

On pose, quel que soit l'entier $t$ compris entre 2 et $k$ au sens large:

$$\Delta=Y(1;2\cdots k);\ \Delta_t=(-1)^t\,Y(1;2\cdots\hat{t}\cdots k),$$

et pour tout $(k-2)$-uple d'éléments de $\mathbb{Z}$, noté $\{m\}$ $(=(m_3,\dots,m_k))$, et tout élément $m'$ de $\mathbb{Z}$, on pose

$$\prod(m',\{m\})=(\Delta_2)^{m'}\prod_{t=3}^{k}(\Delta_t)^{m_t}.$$

Tous ces éléments commutent entre eux d'après I.21. de plus, grâce à I.14(1) et I.15(1), on sait que l'on a, pour tout entier $s$ compris entre 1 et $k-1$ au sens large:

$$(5)\qquad \sum_{t=2}^{k}\Delta_t\Phi_{1t}^{k-s}=(-1)^k\,\Delta\,\delta_{1,s}.$$

(c'est le développement suivant la dernière colonne du déterminant $Y(1;2\cdots k;k-2,\dots,1,k-s)$).

Soient $i$ un élément de $\mathscr{F}$ et $p$ un entier; alors en utilisant (5), on a, pour tout entier $s$ comme dans (5):

$$(6)\quad v(i,s) := \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \prod (p-m, \{m\})(\Phi_{12}^{k-s} \nabla(m_3,..., m_k)\, X_i$$
$$+ \sum_{t=3}^{k} \Phi_{1t}^{k-s} \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, X_t)$$
$$= \delta_{1,s}(-1)^k \Delta \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \prod (p-|m|-1, \{m\})\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X_i.$$

En outre par définition de $X_i$ et 0.(2), on a:

$$(-1)^i X_i = \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+1} \Phi_{12}^{k-r} X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots kw; k-1 \cdots \widehat{k-r} \cdots 1),$$

si $i$ est un élément de $\mathscr{E}$; on a une expression analogue pour $(-1)^{k-1} X_w$ et on pose:

$$V_i(w) = (-1)^i X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots kw; 2),$$
$$V_w(w) = (-1)^{k+1} X(3 \cdots k; 2).$$

En utilisant de nouveau (2), (5) et (6), on trouve avec les notations précédentes et pour tout élément $i$ de $\mathscr{F}$;

$$(7)\quad v(i,s) = \delta_{1s} \Delta^2 \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \prod (p-|m|-2, \{m\})\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, V_i(w).$$

Grâce à (3), (7) et (8), nous pouvons calculer:

$$f_w'' := \Delta^{-2} \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \prod (2(k-1)-|m|, \{m\})\, f(m_3 \cdots m_k).$$

En utilisant les relations de commutations de II.10(2), (3) et (7) (où l'on fait $p$ égale à $2(k-1)$), on obtient:

$$(8)\quad f_w'' = \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \Bigg( \sum_{i \in \mathscr{F}} {}^i\delta(1) \prod (2(k-2)-|m|, \{m\})\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, V_i(w)$$
$$- {}^2\delta(1) \prod (2(k-2)-|m|, \{m\})$$
$$\times \sum_{t=3}^{k} \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, V_t(w)\Bigg).$$

Remarquons que l'on a:

$$(9)\quad \nabla(m_3 \cdots m_k)\, V_i(w) = 0 \qquad \text{si } |m| \geqslant 2(k-3) \text{ et } i \in \mathscr{E},$$
$$\text{ou si } |m| > 2(k-2) \text{ et } i = w;$$

et avec (1):

$$(10)\qquad 0 = f_w''.$$

Combinant les identités (10) avec celles de II.10(1) (où l'on fait $s$ égal à 1), on va pouvoir trouver de nouvelles équations reliant l'ensemble des éléments ${}^i\delta(1)$ où $i$ parcourt l'ensemble $\mathscr{E} \cup \{2\}$. Plus précisément, on utilise toujours la convention (*) et on pose pour tout entier $i$ compris entre 3 et $k$ et tout entier $s$ compris entre 2 et $k-1$ (au sens large):

$$(-1)^i\, W(i, k-s) = X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots k; 2; k-2 \cdots \widehat{k-s} \cdots 1).$$

Soit $v$ un entier strictement supérieur à 2; en utilisant (2) et les définitions, on trouve, pour tout entier $i$ comme précédemment et tout $(k-2)$-uple, noté $\{m\}$ de $\mathbb{Z}^{k-2}$,

$$\begin{aligned}
&\nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(v3 \cdots \hat{\imath} \cdots k; 2) \\
&\quad = \sum_{s=2}^{k-1} (-1)^s \Bigg( \Phi_{v2}^{k-s}\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, W(i, k-s) \\
&\quad\quad + \sum_{t=3}^{k} (\Phi_{vt}^{k-s} - \delta_{vt}\Phi_{22}^{k-s})\, \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, W(i, k-s) \\
&\quad\quad - \sum_{2 \leqslant r,\, t \leqslant k} \delta_{vt}\Phi_{2r}^{k-s}\, \nabla(m_3 \cdots m_r - 1 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, W(i, k-s)\Bigg).
\end{aligned}$$

D'où, avec I.10(1):

$$\begin{aligned}
(11)\quad &(-1)^i \sum_{v=3}^{n} x_{1v}\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(v; 3 \cdots \hat{\imath} \cdots k; 2) \\
&\quad = \sum_{s=2}^{k-1} (-1)^s\, (\Phi_{12}^{1+k-s}\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, W(i, k-s) \\
&\quad\quad + \sum_{t=3}^{k} \Phi_{1t}^{1+k-s}\, \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, W(i, k-s) - \beta(s, \{m\}),
\end{aligned}$$

où l'on a:

$$\begin{aligned}
\beta(s, \{m\}) &= (x_{12}\Phi_{22}^{k-s} + x_{11}\Phi_{12}^{k-s})\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, W(i, k-s) \\
&\quad + \sum_{t=3}^{k} (x_{12}\Phi_{2t}^{k-s} + x_{11}\Phi_{1t}^{k-s} + x_{1t}\Phi_{22}^{k-s}) \\
&\quad \times \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, W(i, k-s) \\
&\quad + \sum_{3 \leqslant r,\, t \leqslant k} x_{1r}\Phi_{2t}^{k-s}(m_3 \cdots m_r - 1 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, W(i, k-s).
\end{aligned}$$

Montrons, que l'on a pour tout entier $p$ et tout entier $s$ compris entre 2 et $k-1$ au sens large.

$$(12) \qquad \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \prod (p - |m|, \{m\})\, \beta(s, \{m\}) = 0;$$

en effet les termes en $\Delta_2 x_{12} \Phi_{22}^{k-s} \nabla(m_3 \cdots m_k)\, W(i, k-s)$ s'éliminent avec les termes en $\Delta_t x_{1t} \Phi_{22}^{k-s} \nabla(m_3 \cdots m_k)\, W(i-k-s)$ grâce à la relation (cf. I.14(1)):

$$\sum_{j=2}^{k} \Delta_j\, x_{1j} = Y(1; 2 \cdots k; k-2 \cdots 11).$$

De plus les termes en $\Delta_2 x_{12} \Phi_{2t}^{k-s}$ ($t$ fixé) s'éliminent avec ceux en $\Delta_r x_{1r} \Phi_{2t}^{k-s}$ pour les mêmes raisons et les termes en $\Delta_2 x_{11} \Phi_{12}^{k-s}$ s'éliminent avec ceux en $\Delta_t x_{11} \Phi_{1t}^{k-s}$ grâce aux égalités suivantes (cf. I.10(4) et I.14(1):

$$x_{11} \Phi_{1j}^{k-s} = \Phi_{1j}^{k-s}(x_{11}+1), \qquad \forall j > 1$$

$$\sum_{j=2}^{k} \Delta_j\, \Phi_{1j}^{k-s} = Y(1; 2 \cdots k; k-2 \cdots 1k-s) = 0;$$

d'où le résultat.

On pose, avec les mêmes notations que pour (8), mais si $w$ est un entier compris entre 3 et $k$ au sens large:

$$(13) \qquad f''_w := \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \sum_{i \in \mathcal{F}} {}^i\delta(1) \prod (2(k-2) - |m|, \{m\})\, \nabla(m_3 \cdots m_k)\, V_i(w).$$

Cet élément est nul car tous les $V_i(w)$ sont nuls, sauf si $i$ est égal à $w$, ayant deux colonnes égales (cf. I.16) et si $i$ égale $w$, on a:

$$V_i(w) = (-1)^i X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots kw) = (-1)^i X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots ki),$$
$$V_w(w) = (-1)^{k+1} X(3 \cdots k) = (-1)^{k+1+k-1} X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots ki);$$

d'où l'assertion.

D'où utilisant (8), (10), II.10(1) et (2) et I.21, on obtient:

$$\begin{aligned}
(14) \qquad e_k := 0 &= \sum_{w=3}^{n} x_{1w} f''_w \\
&= \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} ((-1)^k x_{12}\, {}^2\delta(1) \prod (2(k-2) - |m|) \\
&\quad \times \nabla(m_1 \cdots m_k)\, X(3 \cdots k; 2) \\
&\quad + \sum_{i \in \mathcal{E}} {}^i\delta(1) \prod (2(k-2) - |m|) \left( \sum_{w=3}^{n} x_{1w} \nabla(m_3 \cdots m_k)\, V_i(w) \right) \\
&\quad - {}^2\delta(1) \prod (2(k-2) - |m|, \quad \{m\}) \\
&\quad \times \sum_{t=3}^{k} \sum_{w=k+1}^{n} x_{1w} \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, V_t(w).
\end{aligned}$$

Tenant compte de ce que l'on a, pour tout entier $w$ (resp. $t$) compris entre 3 et $n$ (resp. $k$) au sens large (cf. I.16):

$$V_t(w) = (-1)^{k+t+1} X(w3 \cdots \hat{t} \cdots k; 2),$$

et de (11), (12), (5) et II.10(2):

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1} e_k = &\sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \left( \sum_{i \in \mathscr{E}} {}^i\delta(1) \prod (2(k-2) - |m| - 1, \{m\} \right) \Delta W(i, k-2) \\ &- {}^2\delta(1) \left( x_{12} \prod (2(k-2) - |m|, \{m\}) \right) \\ &\times \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(3 \cdots k; 2) + \prod (2(k-2) - |m|, \{m\}) \\ &\times \sum_{t=3}^{k} (-1)^t \sum_{w=k+1}^{n} x_{1w} \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k) \\ &\times (X(w3 \cdots \hat{t} \cdots k; 2)).\end{aligned}$$

Or on peut réécrire le coefficient de $-{}^2\delta(1)$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}u := &\sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \prod (2(k-2) - |m| - 1, \{m\})(x_{12} \Delta_2 \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(3 \cdots k; 2) \\ &+ \sum_{t=3}^{k} (-1)^t \Delta_t \sum_{w=k+1}^{n} x_{1w} \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(w3 \cdots \hat{t} \cdots k; 2).\end{aligned}$$

Or on a comme plus haut (puis avec I.21):

$$-x_{12} \Delta_2 = \sum_{t=3}^{k} x_{1t} \Delta_t = \sum_{t=3}^{k} \Delta_t x_{1t},$$

$$X(3 \cdots k; 2) = (-1)^{t+1} X(t3 \cdots \hat{t} \cdots k; 2), \qquad \forall 3 \leqslant t \leqslant k;$$

d'où finalement avec (11) et (12)

$$\begin{aligned}u = &\sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \prod (2(k-2) - |m| - 1, \{m\}) \sum_{t=3}^{k} (-1)^t \Delta_t \\ &\times \sum_{w=3}^{n} x_{1w} \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(w3 \cdots \hat{t} \cdots k; 2) \\ = &\Delta \prod (2(k-3) - |m|; \{m\}) \sum_{t=3}^{k} \Delta_t \nabla(m_3 \cdots m_k)\, W(t, k-2).\end{aligned}$$

C'est-à-dire:

$$\begin{aligned} e'_k &:= (-1)^{k+1} e_k \\ &= \Delta \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \Bigg( \sum_{i \in \mathcal{E}} {}^{i}\delta(1) \prod (2(k-2) - |m| - 1, \{m\}) \nabla(m_3 \cdots m_k) \\ &\quad \times W(i, k-2) - {}^{2}\delta(1) \prod (2(k-2) - |m| - 1; \{m\}) \\ &\quad \times \sum_{t=3}^{k} \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, W(t, k-2) \Bigg) \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a:

$$W(i, k-2) = (-1)^i X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots k; 2);$$

d'où avec I.10(4)

$$\nabla(m_3 \cdots m_k)\, W(i, k-2) = 0 \qquad \text{si} \quad |m| > 2(k-3).$$

De plus, on pose pour tout entier $w$ compris entre $k+1$ et $n$ (au sens large):

$$\begin{aligned} e''_k &= \Delta^{-1} e'_k, \\ e''_w &:= \operatorname{ad} x_{wk}(e''_k); \end{aligned}$$

et on remarque que $e''_w$ est de la même forme que $e''_k$ sauf que $\Phi^r_{k2}$ est remplacé par $\Phi^r_{w2}$ et que ${}^{k}\delta(1)$ est remplacé par ${}^{w}\delta(1)$. Soit $r$ un entier compris entre 3 et $k-1$ au sens large et supposons que nous ayons les identités suivantes pour tout entier relatif noté $p$ et tout entier $w$ compris entre $r+1$ et $n$ au sens large ($\mathcal{E}' := \{3 \cdots r\}$):

$$\begin{aligned} d_w := \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} & \Bigg( \sum_{i \in \mathcal{E}'} (-1)^i\, {}^{i}\delta(1) \prod (p - |m|, \{m\}) \\ & \times \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots rw; 2) \\ & + (-1)^{r+1}\, {}^{w}\delta(1) \prod (p - |m|, \{m\}) \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(3 \cdots r; 2) \\ & - {}^{2}\delta(1) \left( \prod (p - |m|, \{m\}) \right) \sum_{t=3}^{r} (-1)^t \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k) \Bigg) \\ & \times X(3 \cdots \hat{t} \cdots r; 2) = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que nous venons de démontrer cela pour $r$ égal à $k-1$ (il suffit de multiplier $e''_w$ par une puissance convenable de $\Delta_2$) et montrons que nous avons des identités de même type en remplaçant $r$ par $r-1$. Pour cela on pose:

$$d_w := \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \sum_{i \in \mathscr{E}'} (-1)^i \, {}^i\delta(1) \prod (p-|m|, \{m\})$$
$$\times \nabla(m_3 \cdots m_k) \, X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots rw; 2) + (-1)^{r+1} \, {}^w\delta(1) \, \Pi(p-|m|, \{m\})$$
$$\times \nabla(m_3 \cdots m_k) \, X(3 \cdots r; 2),$$

pour tout entier $w$ compris entre 3 et $r$ au sens large et ces éléments sont nuls comme pour (13). On calcule $\sum_{w=3}^{n} X(1; 2 \cdots k-r+1, w) \, d_w =: X(1; 2 \cdots k-r+1) \, b_r$. Ce calcul est analogue à celui de (14) (où $r$ valait $k$) mais à la place de (5), il faut utiliser les égalités suivantes ((15) et (16)) pour avoir l'analogue de (12):

Soient $s$ un premier compris entre 1 et $k-r+1$ et $l$ un entier compris entre 1 et $r-2$ (au sens large) alors on a:

$$(15) \qquad \sum_{j=2}^{k} \Delta_j X(1; 2 \cdots k-r+1; k-r+1 \cdots \hat{s} \cdots 1) \, \Phi_{1j}^{s+l}$$
$$= \delta_{s,k-r+1} \delta_{l,r-2} X(1; 2 \cdots k-r+1),$$

ces égalités résultent de I.17 et I.20, puisque pour tout $k-r$ uple d'entiers, noté $\{m\}$, vérifiant:

$$|m| < (k-r+1)(k-r+2)/2 - s,$$

on a:

$$Y(1; 2 \cdots k-r+1; \{m\}) \, \Phi_{1j}^{s+l} = \Phi_{1j}^{s+l} \, Y(1, 2 \cdots k-r+1; \{m\})$$
$$+ \sum_{\{m'\} \in \mathbb{N}^{k-1}, (k-r)(k-r+1)/2 - |m| < s' < s+l} \Phi_{1j}^{s+l-s'}$$
$$\times Y(1; 2 \cdots k-r+1; \{m'\})$$

et la valeur maximale de $s+l-s'$, atteinte quand $s'$ est le plus négatif possible vaut:

$$s+l+|m| - (k-r)(k-r+1)/2 - 1 \leqslant l + (k-r+1) - 1 \leqslant k-2;$$

de plus, on a:

$$s + l \leqslant (k-r+1) + r - 2 = k-1,$$

la valeur maximale étant atteinte quend $s$ et $l$ sont tous deux maximum. Il ne reste donc plus qu'à utiliser I.14(1). D'après I.11, on a:

$$(16) \qquad \Phi_{11}^{s} \Phi_{1j}^{l} = \Phi_{1j}^{l} \Phi_{11}^{s} - \sum_{1 \leqslant s' < s} (\Phi_{1j}^{s-s'} \Phi_{11}^{l+s'-1} - \Phi_{1j}^{l+s'-1} \Phi_{11}^{s-s'}).$$

Finalement on trouve:

$$0 = b_r = \sum_{\{m\} \in \mathbb{Z}^{k-2}} \sum_{i \in \mathscr{E}'} (-1)^i\, {}^i\delta(1) \prod (p - |m| - 1; \{m\}) \tag{17}$$
$$\times \nabla(m_3 \cdots m_k)\, X(3 \cdots \hat{\imath} \cdots r; 2)$$
$$- {}^2\delta(1) \prod (p - |m| - 1; \{m\}) \sum_{t=3}^{r} (-1)^t$$
$$\times \nabla(m_3 \cdots m_t - 1 \cdots m_k)\, X(3 \cdots \hat{t} \cdots r, 2).$$

On pose

$$b_w = [x_{wr}, b_r], \qquad \text{si} \quad w \in\, ]k, n],$$
$$b_w = -\tau(w, r)\, b_r, \qquad \text{si} \quad w \in [r+1, k],$$

où $\tau(w, r)$ est l'élément de $Gl_n(\mathbb{C})$ qui représente la transposition de $w$ et $r$. Il faut encore faire les remarques suivantes:

$$\tau(w, r)\, \nabla(m_3 \cdots m_r \cdots m_w \cdots m_k) = \nabla(m_3 \cdots m_w \cdots m_r \cdots m_k),$$
$$\tau(w, r)\, \Delta_j = -\Delta_j, \qquad \text{si} \quad j \neq r, w,$$
$$\tau(w, r)\, \Delta_r = (-1)^{r+r-w+1}\, Y(1; 2 \cdots r \cdots \hat{w} \cdots k)$$
$$= -\Delta_w,$$
$$\tau(w, r)\, \Delta_w = (-1)^{w+r-w+1}\, Y(1; 2 \cdots \hat{r} \cdots w \cdots k)$$
$$= -\Delta_r;$$

d'où:

$$\tau(w, r) \prod (p - |m| - 1; \{m\})$$
$$= (-1)^{p-|m|-1+|m|} \prod (p - |m| - 1; m_3 \cdots m_w \cdots m_r \cdots).$$

Il est alors clair que dans $b_w$ les rôles de $r$ et $w$ sont échangés.

Ainsi les éléments $b_w$, où $w$ varie entre $r$ et $n$ bornes includes sont les éléments cherchés.

Finalement quand $r$ égale 3, on trouve, après simplification par $\Delta_2^{p-2}$ (cf. II.5), que (17) devient:

$$ {}^3\delta(1)\, \Delta_2 - {}^2\delta(1)\, \Delta_3 = 0. \tag{18}$$

Soit $w$ un entier strictement supérieur à $k$, en appliquant ad $x_{w3}$ à (18), avec I.10(4) et II.8(3), on trouve:

$$ {}^w\delta(1)\, \Delta_2 = 0;$$

d'où ${}^w\delta(1)$ est nul et le lemme résulte de II.8(3).

II.12. LEMME. (notations II.7). *On pose*:

$$\Delta = X(1; k \cdots 2).$$

*Il existe un entier, noté R, tel que l'on ait, dans Q, pour tout entier i compris entre* 1 *et n au sens large*:

$$x_{i1} \in (U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}))\, Z\Delta^{-R}.$$

Si $k$ est égal à $n$ cela est démontré dans [Di 1]; redonnons en une démonstration analogue; d'aprés I.10(3) et I.10(1), pour tout entier $r$ compris en 2 et $n$, on a:

$$\Phi_{11}^{r} = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{1j}^{r-1} x_{j1} \in U(\mathfrak{p})\, Z(\mathfrak{g})$$

comme $\Phi_{11}^{r-1} x_{11}$ est aussi, d'après I.10(3) et $x_{11} + \sum_{s=2}^{n} x_{ss} \in Z(\mathfrak{g})$, un élément de $U(\mathfrak{p})\, Z(\mathfrak{g})$; soit $i$ comme dans l'énoncé du lemme, alors on a:

$$u := \sum_{j=2}^{n} \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} X(1; 2 \cdots \hat{\imath} \cdots n; n-1 \cdots \widehat{n-r} \cdots 1)\, \Phi_{1j}^{n-r}$$
$$\times x_{j1} \in U(\mathfrak{p})\, Z(\mathfrak{g}).$$

D'après 0.(2), et I.16 on a, si $j$ est différent de $i$:

$$\sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} X(1; 2 \cdots \hat{\imath} \cdots n; n-1 \cdots \widehat{n-r} \cdots 1) = X(1; 2 \cdots \hat{\imath} \cdots nj) = 0;$$

d'où

$$u = -X(1; 2 \cdots \hat{\imath} \cdots ni)\, x_{i1}.$$

Le résultat résulte alors de I.18 et I.25.

Supposons donc que $k$ est strictement inférieur à $n$ et supposons d'abord que $i$ est supérieur strictement à $k$; appliquant ad $x_{i1}$ à II.7(2) on obtient pour tout entier $j$ compris entre 2 et $k$ au sens large:

$$\sum_{s=1}^{k-1} {}^{i}\delta(s)\, \Phi_{1j}^{k-s} = \sum_{s=0}^{k-1} \delta(s)\, \Phi_{ij}^{k-s}.$$

En utilisant I.15(2), on trouve:

$$-{}^{i}\delta(1)\, \Delta = \sum_{s=0}^{k-1} \delta(s)\, \tilde{\Phi}_{ik}^{k-s},$$

où

$$\tilde{\Phi}_{ik}^{k-s} = \sum_{t=2}^{k} (-1)^{k-t}\, \Phi_{it}^{k-s}\, Y(1; k \cdots \hat{t} \cdots 2).$$

D'après I.29 et II.7(1) et I.23(2), on a:

$$\delta(s) \in \Delta^{-1}(U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}))\, Z, \qquad 0 \leqslant s \leqslant k-1$$

$$\tilde{\Phi}_{ik}^{k-s} \in U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}), \qquad \forall 1 \leqslant s \leqslant k-1$$

et d'après I.28(2) et I.14(1), on a aussi:

$$\tilde{\Phi}_{ik}^{k} - x_{i1}\, \Delta \in U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p});$$

d'où avec II.11:

$$(*) \qquad x_{i1} \in \Delta^{-1}(U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}))\, Z\Delta^{-1}$$

(i.e., le lemme si $k < i \leqslant n$; cf. I.25).

On obtient ensuite le lemma pour $1 < i \leqslant k$, en appliquant ad $x_{ji}$, où $1 < j \leqslant k$ à $(*)$ ($j$ prend le rôle de $i$) et en remarquant que $x_{ji} \in \mathfrak{p}$ sous ces conditions. Quant à $x_{11}$, on sait que l'on a $x_{11} + \sum_{l=2}^{n} x_{ll} \in Z(\mathfrak{g})$.

II.13. *Fin de la démonstration de* II.6. Grâce à II.12, on sait que dans $Q$, l'ensemble des éléments $(x_{i1})_{2 \leqslant i \leqslant n}$ s'identifie à un ensemble d'éléments de $(\mathrm{Fract}\; U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}))\, Z$; d'après II.8(2), cela entraîne que, dans $Q$, ${}^{i}\delta(s)$ est nul quels que soient $i$ et $s$ où l'élément est défini et cela termine la démonstration de II.6, conformément à ce qui a été dit à la fin de II.7.

II.14. Lemme (Notations II.12). *L'élément $\Delta$ de $U(\mathfrak{p})$ est localement ad-nilpotent dans $U(\mathfrak{g})/I$.*

D'après I.10(4), on a

$$[\Delta, x_{11}] = -(k-1)\, \Delta$$

*et le lemme résulte alors facilement de* II.12 et I.25.

II.15. Proposition. *Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ de niveau $k$; on pose*:

- $\Delta = Y(1\,; k \cdots 2) \in U(\mathfrak{p})$
- *$S$ l'ensemble multiplicatif de $U(\mathfrak{p})$ engendré par $\Delta$*
- *$\bar{Z}$ l'image de $Z(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})/I$.*

*Alors* $U(\mathfrak{g})/I$ (resp. $U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p})$) *admet une localisation en $S$ et l'inclusion naturelle de $(U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}))_S\, \bar{Z}$ dans $(U(\mathfrak{g})/I)_S$ est un isomorphisme et on a*:

$$\dim U(\mathfrak{g})/I = \dim (U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}))\, \bar{Z}.$$

Le début est un corollaire immédiat grâce à [BR, 2.2] de II.14, I.25 puis II.12. La fin résulte de II.14 et [BK, 6.1].

II.16. COROLLAIRE. *Soit $I$ un idéal primitif complètement premier de $U(\mathfrak{g})$; alors on a:*

(1) *$I \cap U(\mathfrak{p})$ est un idéal primitif complément premier de $U(\mathfrak{p})$.*

(2) *On note $k$ le niveau de $I$; alors il existe $k-1$ nombres complexes uniques notés $u_1 \cdots u_k$ vérifiant:*

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad \Phi_{ij}^k + \sum_{s=1}^{k} u_s \Phi_{ij}^{k-s} \in I;$$

*et $k$ est le plus petit entier ayant cette propriété.*

(3) *Avec les notations de* II.3, *l'idéal dérivé $I^{\#}$ de $I$ est primitif.*

D'après [Di 2, Théorème c] un idéal premier d'une algèbre enveloppante complexe est primitif si et seulement si le centre de l'anneau des fractions est réduit au corps $\mathbb{C}$. Cela et II.15 entraînent immédiatement (1) et, avec II.6, l'existence et l'unicité de $(u_1 \cdots k_k)$. La fin de (2) résulte de II.5 et (3) résulte de la construction de II.2 (cf. II.3(1)).

II.17. LEMME. *Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ de niveau $k$; on pose:*

(1) • $v_0 = X(1; 2 \cdots k)$,

• *pour* $1 \leqslant s \leqslant k-1$:

$v_s = (-1)^s \det A_s$ *où* $A_s$ *est la matrice* $k-1 \times k-1$ *notée* $(a_{vw})$ *où l'on a*:

$$a_{vw} = \Psi_{1w+1}^{k-v+1} \qquad si \quad v < s+1,$$

$$a_{vw} = \Psi_{1w+1}^{k-v} \qquad si \quad v > s+1.$$

*Ces élements sont dans $U(\mathfrak{p})$; soit $j$ un élément de $E'_1$ alors on a*:

(2) $$\sum_{s=0}^{k-1} v_s \Psi_{1j}^{k-s} \in I.$$

*L'ensemble des éléments $(v_0^{-1} v_s)_{1<s<k-1}$ sont dans* Fract $U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p})$ *et dans le centre de* Fract $U(\mathfrak{g})/I$.

Grâce à I.10(2), I.14(2) et (1) les définitions de II.7, on sait que, $s$ étant fixé entre 1 et $k-1$ (bornes incluses) l'élément $v_0^{-1} v_s$ de Fract $U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p})$ (cf. I.8(2)) est dans le sous $Z(\mathfrak{g})$-module de Fract $U(\mathfrak{g})/I$ engendré par l'ensemble des éléments $(\delta(s'))_{0<s'<k-1}$. Il résulte alors de II.8(2) et II.15 qu'ils sont dans le centre de Fract $U(\mathfrak{p})/I$. En outre (2) est clair grâce à I.23(1) et II.4 (cf. 0.(2)).

II.18. LEMME. *Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ de niveau $k$; avec les notations de* I.34(3) *et* (4) *et* I.26 *on a, pour tout entier $r$*:

$$\forall k+1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad (\Delta)^r \theta({}''\Phi_{ij}^r) - (\Delta)^{r-1} \tilde{\Phi}_{ij}^r \in I$$

(*où* $\Delta = Y(1; k \cdots 2)$).

Quand $r$ est égal à 1, le lemme est trivial (cf. fin de I.34). On démontre le lemme par récurrence sur $r$; on suppose donc que $r$ est strictement plus grand que 1 et que l'on a:

$$(1) \qquad (\Delta)^{r-1} \theta({}''\Phi_{ij}^{r-1}) - (\Delta)^{r-2} \tilde{\Phi}_{ij}^{r-1} \in I.$$

Or on a (cf. I.34) par définition de ${}''\Phi_{ij}^r$:

$${}''\Phi_{ij}^r = \sum_{l=k+1}^{n} x_{il}\, {}''\Phi_{lj}^{r-1}.$$

Puisque $\theta$ est un homomorphisme d'algèbres (cf. I.33 et I.26) dont l'image est centralisée par $\Delta$, grâce à la fin de I.34, on obtient:

$$(\Delta^r)\, \theta({}''\Phi_{ij}^r) = \sum_{l=k+1}^{n} \tilde{x}_{il} (\Delta^{r-1} \theta({}''\Phi_{lj}^{r-1}) - \Delta^{r-2} \tilde{\Phi}_{lj}^{r-1})$$
$$+ \sum_{l=k+1}^{n} \Delta^{r-2} \tilde{x}_{il} \tilde{\Phi}_{lj}^{r-1} \in I + \sum_{l=k+1}^{n} \Delta^{r-2} \tilde{x}_{il} \tilde{\Phi}_{lj}^{r-1}$$

$$(*) \qquad u := \sum_{l=k+1}^{n} \tilde{x}_{il} \tilde{\Phi}_{lj}^{r-1} - \Delta \Phi_{ij}^r \in I.$$

Remarquons que si $l$ est un entier compris entre 2 et $k$ au sens large, $\tilde{x}_{il}$ est le déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales et donc est l'élément nul. De plus soit $l$ un entier compris entre 2 et $n$ au sens large, alors d'après I.19, I.17 et I.16 on a:

Utilisant (1) et divisant l'énoncé du lemme par $\Delta^{r-2}$, il faut donc démontrer que l'on a:

$$\tilde{x}_{il} = x_{il} \Delta + \sum_{m=2}^{k} (-1)^{k-m+1} x_{im} Y(1; lk \cdots \hat{m} \cdots 2)$$
$$= \Delta x_{il} + \sum_{m=2}^{k} (-1)^{m-1} x_{im} X(1; k \cdots \hat{m} \cdots 2 \cdots l)$$

D'où finalement:

$$u = \sum_{l=1}^{n} (\Delta x_{il} \tilde{\Phi}_{lj}^{r-1} - \Delta \tilde{\Phi}_{rj}^r) - \tilde{x}_{i1} \tilde{\Phi}_{1j}^{r-1}$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=2}^{k} (-1)^{m-1} x_{im} X(1; k \cdots \hat{m} \cdots 2l)\, \tilde{\Phi}_{lj}^{r-1}.$$

D'après I.10(1) et le développement d'un déterminant suivant la première colonne, on sait que le premier terme entre parenthèses est nul; en développant $X(1; k \cdots \hat{m} \cdots 2l)$ suivant la dernière colonne, on voit que:

$\sum_{l=1}^{n} X(1; k \cdots \hat{m} \cdots 2l)\, \tilde{\Phi}_{lj}^{r-1}$ appartient au sous-$U(\mathfrak{g})$-module à gauche de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $(\tilde{\Phi}_{1j}^{s})_{r \leqslant s \leqslant r+k-2}$.

Choisissons un ensemble d'éléments de $U(\mathfrak{g})$ notés $u_0 \cdots u_k$ vérifiant II.6(1); en utilisant I.10(1) il est clair que l'on a:

$$\sum_{s=0}^{k} u_s \Phi_{1j}^{k+t-s} \in I, \qquad \forall 0 \leqslant t.$$

D'où évidemment:

$u_0 \tilde{\Phi}_{1j}^{k+t}$ est un élément de $U(\mathfrak{g})$ appartenant au sous-$U(\mathfrak{g})$ module à gauche engendré par $(\tilde{\Phi}_{1j}^{k+t-s})_{1 \leqslant s \leqslant k}$.

Comme $\tilde{\Phi}_{1j}^{k}$ $(= Y(1; jk \cdots 2))$ est un élément de $I$ (cf. II.4) et que $u_0$ n'est pas un élément de $I$, on voit de proche en proche que $\tilde{\Phi}_{1j}^{k+t}$ est un élément de $I$ quel que soit l'entier $t$; de plus $\tilde{\Phi}_{1j}^{t}$ est nul si $t$ est inférieur strictement à $k$ (cf. I.14(1)) la démonstration du lemme est terminée.

II.19. Proposition. *Soit $I$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ de niveau $k$ et $I^{\#}$ l'idéal dérivé de $I$ qui est un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g}_k)$. Alors le niveau de $I^{\#}$ est inférieur ou égal à $k$.*

Notons $t$ le niveau de $I^{\#}$; si $k$ est supérieur ou égal à $n-k$, il n'y a rien à démontrer puisque $t$ est par définition inférieur ou égal à $n-k$. On suppose donc que $k$ est strictement inférieur à $n-k$. Reprenons les notations de I.34; soit $(i, j)$ un élément de $E_2''$ et choisissons des éléments $(u_0 \cdots u_k)$ de $U(\mathfrak{g})$ satisfaisant à II.6(1). Il est clair (cf. fin de I.34 pour les notations) que l'on a:

$$f_j := \sum_{s=0}^{k} u_s \tilde{\Phi}_{ij}^{k-s} \in I. \tag{1}$$

Fixons un $k$-uple d'entiers tous distincts et tous distincts de $i$ compris entre $k+1$ et $n$ au sens large (cela est possible puisque $n-k$ est supérieur strictement à $k$ par hypothèse). Notons le $\{j\}$ $(=(j_1 \cdots j_k))$. Soit $s$ un entier et notons $\tilde{Y}(i; \{j\}; k-s, k-1 \cdots 1)$ le déterminant de la matrice $k \times k$ notée $(a_{vw})$ où l'on a:

$$\begin{aligned} a_{vw} &= \tilde{\Phi}_{ij_v}^{k-w+1} && \text{si} \quad w > 1, \\ &= \tilde{\Phi}_{ij_v}^{k-s} && \text{si} \quad w = 1. \end{aligned}$$

Grâce à II.18 et I.14(1) (appliqué à $\mathfrak{g}_k$ au lieu de $\mathfrak{g}$) et au fait que $\theta$ est un homomorphisme d'algèbres (cf. I.26), on sait que l'on a:

$$\tilde{Y}(i; \{j\}; k-s, k-1 \cdots 1) \in I \qquad \text{si} \quad s > 0.$$

On voit alors facilement en utilisant une combinaison convenable des éléments $(fj_r)_{1 \leqslant r \leqslant k}$ que l'on a:

$$u := \tilde{Y}(i; \{j\}; k \cdots 1) \in I.$$

Revenant à la définition de $u$ comme déterminant et en le développant suivant la dernière colonne puis l'avant dernière (et caetera), on voit en utilisant I.34(3) et le fait que $\mathfrak{g}_k$ laisse stable $m(k)$ que l'on a (en notant $''Y(i; \{j\})$ le déterminant de la matrice $k \times k$, notée $b_{vw}$, où $b_{vw} = {''\Phi}_{ij_v}^{k-w+1}$):

$$''Y(i; \{j\}) \in ((I \cap U(\mathfrak{p}) + U(\mathfrak{p})\, m(k)) \cap U(\mathfrak{g}_k).$$

Par définition de $I^{\#}$ (cf. II.3), on a donc:

$$''Y(i; \{j\}) \in I^{\#};$$

et en tenant compte de II.4 (où on change $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_k$) on voit que $k$ est supérieur ou égal au niveau de $I^{\#}$; d'où la proposition.

II.20. PROPOSITION. *Pour tout entier $r$, on note $Z(\mathfrak{g})_r$ la sous-algèbre de $Z(\mathfrak{g})$ engendrée par l'ensemble des éléments centraux de degré inférieur ou égal à $r$. Alors l'application qui a un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$, noté $I$, associe $I \cap U(\mathfrak{p})$ et $I \cap Z(\mathfrak{g})_{k-t}$ (où $k$ est le niveau de $I$ et $t$ le niveau de l'idéal dérivé de $I$; cf.* II.3 *et* II.19) *est injective.*

Traitons d'abord le cas où $k$ est égal à $n$; soit $I$ un idéal complètement premier de niveau $n$; on a vu en II.3($\beta$) que $I \cap U(\mathfrak{p})$ est l'idéal 0. Notons $I'$ l'idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $I \cap Z(\mathfrak{g})$. Comme $I'$ est inclus dans $I$, l'idéal $I'$ coupe aussi $U(\mathfrak{p})$ en 0. D'autre part d'apres [Di 1, 2.16], $U(\mathfrak{p})$ et $Z(\mathfrak{g})$ sont linéairement indépendants; avec II.15 on obtient l'égalité suivante: $\dim U(\mathfrak{g})/I = \dim U(\mathfrak{g})/I'$.

Ainsi $I$ et $I'$ coïncident et donc $I$ est engendré par son intersection avec $Z(\mathfrak{g})$; la proposition en résulte puisque dans ce cas $t$ est nul et $Z(\mathfrak{g})_n$ est $Z(\mathfrak{g})$ tout entier. Traitons aussi, séparément, le cas où $k$ est égal à 1; dans ce cas $I$ contient $x_{in}$ donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = sl(n, \mathbb{C})$ par simplicité de $sl(n, \mathbb{C})$, et $t$ aussi est égal à 1. Rappelons que $Z_1$ est l'élément $\sum_{i=1}^{n} x_{ii}$ et que $I$ est déterminé par $I \cap k[Z_1]$ puisque $I$ est le noyau d'un caractère de $\mathfrak{g}$ prolongé à $U(\mathfrak{g})$ canoniquement. Comme $k - t = 0$, il faut ici démontrer que $I$ est aussi déterminé par son intersection avec $U(\mathfrak{p})$. Remarquons que l'élément $nx_{11} - Z_1$ est dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ donc dans $I$. Notons $Z_1^{\#}$ l'élément $\sum_{i=2}^{n} x_{ii}$ et $I^{\#}$ l'idéal dérivé de $I$; d'après ce qui vient d'être dit, on a l'équivalence suivante:

$$I \cap k[Z_1] = 0 \Leftrightarrow I^{\#} \cap k[Z_1^{\#}] = 0$$

(car $Z_1^{\#} = Z_1 - x_{11} = 1/n((n-1)Z_1 - (nx_{11} - Z_1))$). De plus, si $I \cap k[Z_1]$ est l'idéal engendré par l'élément $Z_1 - Z$ où $Z$ est un nombre complexe alors $I \cap k[Z_1]$ est engendré par l'élément $Z_1^{\#} - (n-1)/nZ$ et réciproquement. C'est-à-dire $I$ est déterminé par son intersection avec $U(\mathfrak{p})$. Supposons maintenant que $k$ est strictement compris entre 1 et $n$; on fixe un idéal complètement premier noté $J$ de $U(\mathfrak{p})$, de niveau $k$ et on note $J^{\#}$ l'idéal dérivé de $J$ et $t$ le niveau de $J^{\#}$. On suppose que $t$ est inférieur ou égal à $k$ et on note $I'$ l'intersection des idéaux complètement premiers de $U(\mathfrak{g})$ coupant $U(\mathfrak{p})$ suivant $J$; la démonstration consiste à prouver qu'il existe pour tout entier $i$ appartenant à $E_1$ un élément, noté $\Delta'$ de $U(\mathfrak{p}) - J$ pour lequel on a:

$$x_{i1}\,\Delta'^2 \in I' + U(\mathfrak{p})\,Z(\mathfrak{g})_{k-1}, \tag{1}$$

puis à démontrer de proche en proche que pour tout entier $r$ compris entre $k-t$ et $k$ au sens strict il existe des éléments de $U(\mathfrak{p}) - J$, notés $e(r)$, pour lesquels on a:

$$e(r)\,Z_r \in I' + U(\mathfrak{p})\,Z(\mathfrak{g})_{r-1}. \tag{2}$$

Il est clair que l'ensemble des éléments $(Z_s)_{1 \leqslant s \leqslant n}$ sont des générateurs algébriquement indépendants de $Z(\mathfrak{g})$ (cela se voit en regardant leur gradué qui est $\mathrm{tr}(x^s)$ d'après I.10(2) et 0.(8) et que $Z(\mathfrak{g})_{k-1}$ est engendré en tant qu'algèbre par $Z_{k-t+1} \cdots Z_{k-1}$ et $Z(\mathfrak{g})_{k-t}$. Admettant (1) et (2) terminons la démonstration. Soit $L$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ coupant $U(\mathfrak{p})$ suivant $J$. Le sous-$U(\mathfrak{p})$-module à droite de $U(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathfrak{g}$ coïncide avec le sous-$U(\mathfrak{p})$-module à gauche engendré par $\mathfrak{g}$; soit $u$ un élément de $L$; d'après ce qui vient d'être dit et le Poincaré–Birkoff–Witt Théorème, (1) montre qu'il existe un entier, noté $m$, pour lequel on a:

$$u\,\Delta'^m \in I' + U(\mathfrak{p})\,Z(\mathfrak{g})_{k-1}.$$

Puis avec (2), on voit qu'il existe un élément, noté $y$, de $U(\mathfrak{p}) - J$ pour lequel on a:

$$uy \in I' + U(\mathfrak{p})\,Z(\mathfrak{g})_{k-t}.$$

Ainsi $L$ qui est un idéal complètement premier est déterminé par son intersection avec l'algèbre, notée $B$, $U(\mathfrak{p})\,Z(\mathfrak{g})_{k-t}$. D'après [Di1, 2.16] $U(\mathfrak{p})$ et $Z(\mathfrak{g})$ sont linéairement disjoints; notant $A$ l'algèbre $U(\mathfrak{p}) \otimes Z(\mathfrak{g})_{k-t}$ cela entraîne que l'application naturelle de $A$ dans $B$, notée $\alpha$, est un isomophisme d'algèbres. Soit $M$ un idéal complètement premier de $A$ et $M'$ l'intersection de $M$ avec $Z(\mathfrak{g})_{k-t}$. D'après [Di3, 4.5.1], soit $u'$ un élément de $M$, alors il existe un élément noté $y'$ de $Z(\mathfrak{g})_{k-t} - M'$ tels que l'on ait:

$$u'y' \in (U(\mathfrak{p}) \cap M)\,A + AM'.$$

Grâce à $\alpha$, il est alors clair que $L \cap B$ est déterminé par son intersection avec $U(\mathfrak{p})$ et son intersection avec $Z(\mathfrak{g})_{k-t}$ ce qui termine la démonstration.

Prouvons maintenant (1) et (2). Remarquons d'abord que l'on a:

$$x_{11} - Z_1 \in U(\mathfrak{p}),$$

d'où (1) dans le cas où $i$ est égal à 1.

Soit $(i, j)$ un élément de $E'_1$; reprenons les notations de II.17; on a d'après II.17 et I.8:

$$\sum_{s=0}^{k-1} v_s \, \Psi_{1j}^{k-s} \in J.$$

Soit $L$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ coupant $U(\mathfrak{p})$ suivant $J$ et supposons que $i$ est différent de $j$; alors on a dans le corps des fractions de $U(\mathfrak{g})/L$ d'après II.17 (appliqué à $L$ au lieu de $J$):

$$\left[ x_{i1}, \sum_{s=0}^{k-1} v_0^{-1} v_s \Psi_{1j}^{k-s} \right] = \sum_{s=0}^{k-1} v_0^{-1} v_s \Psi_{ij}^{k-s} = 0,$$

d'où:

$$(3) \qquad \sum_{s=0}^{k-1} v_s \Psi_{ij}^{k-s} \in I'.$$

Montrons maintenant que quels que soient l'élément $(i, j)$ de $E'_2$ et l'entier positif $r$, il existe deux ensembles d'éléments de $U(\mathfrak{g})$, notés $(\varphi_i^s(r))_{1 \leqslant s \leqslant r-1}$ et $(\varphi_{ij}^s(r))_{1 \leqslant s \leqslant r-1}$ tels que l'on ait (cf. notations I.27)

$$(4) \qquad \varphi_i^s(r) = {}'\Phi_{i1}^s + \sum_{0 < m < s} a_m \, {}'\Phi_{i1}^{s-m},$$

$$(5) \qquad \varphi_{ij}^s(r) = {}'\Phi_{ij}^s + \sum_{0 < m < s} b_m \, {}'\Phi_{ij}^{s-m},$$

où $(a_m)$ et $(b_m)$ sont des nombres complexes ne dépendant que de $s$ et $r$ (et non de $i$ et $j$)

$$(6) \qquad \Psi_{ij}^r - \sum_{s=1}^{r-1} \varphi_i^s(r) \, \Psi_{1j}^{r-s} + \sum_{s=1}^{r-1} \varphi_{ij}^s(r) \, Z_{r-s} \in U(\mathfrak{p}).$$

Cela se prouve par récurrence sur $r$; pour $r = 1$ il suffit de prendre tous les éléments cherchés égaux à 0 puis on utilise I.22 et I.9 pour écrire $\Psi_{ij}^r$ pour la forme suivante:

$$\Psi_{ij}^r = \sum_{l=1}^{n} (x_{il} - (r-1)\,\delta_{il}) \, \Psi_{lj}^{r-1} - Z_{r-1}(x_{ij} - (r-1)\,\delta_{ij}),$$

et l'assertion devient immédiate par récurrence.

(7) Remarquons que (4) entraîne que $\varphi_i^1(r)$ est égal à $x_{i1}$ et que (5) entraîne que $\varphi_{ij}^s(r)$ sont des éléments de $U(\mathfrak{p})$. On pose:

$$\bar{\Psi}^r_{2n} := \sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m \Psi^r_{2n-m} Y(1; n \cdots \widehat{n-m} \cdots n-k+2);$$

$$f := \sum_{s=0}^{k-1} v_s \bar{\Psi}^{k-s}_{2n};$$

$$\Delta' = Y(1; n \cdots n-k+2).$$

Remarquons que $n-k+2$ est strictement supérieur à 2 et donc avec (3), on a:

$$f \in I'. \tag{8}$$

Soit $r$ un entier inférieur ou égal à $k-1$; d'après I.10(2) et I.14(1) on a:

$$\sum_{m=0}^{k-2} (-1)^m \Psi^r_{1n-m} Y(1; n \cdots \widehat{n-m} \cdots n-k+2) = \delta_{r,k-1} \Delta'. \tag{9}$$

En utilisant (7), (6) et (9), on obtient:

$$f - x_{21} \Delta' \in U(\mathfrak{p})\, Z(\mathfrak{g})_{k-1}.$$

D'après I.23(1) et II.4, l'élément $\Delta'$ appartient à $U(\mathfrak{p}) - J$. On a donc démontré (1) pour $i$ égal à 2 (cf. (8)). De plus pour tout entier $i$ supérieur strictement à 2, on a:

$$[x_{i2}, x_{21} \Delta'] \in I' + U(\mathfrak{p})\, Z(\mathfrak{g})_{k-1};$$

d'où avec I.19 et I.21:

$$x_{i1} \Delta'^2 + x_{21} \Delta' [x_{i2}, \Delta'] \in I' + U(\mathfrak{p})\, Z(\mathfrak{g})_{k-1};$$

c'est-à-dire (1) pour tout entier $i$ de $E_1$. Montrons maintenant (2); si $t$ est égal à 1, il n'y a rien à démontrer supposons donc que $t$ est strictement supérieur à 1; cela entraîne en particulier que $n-k$ est strictement supérieur à 1.

Soient $(i, j)$ des éléments de $E_2$ et $r$ un entier positif; on pose:

$$\tilde{\Psi}^r_{ij} = \Psi^r_{ij} Y(1; k \cdots 2) + \sum_{q=2}^{k} (-1)^{k-s+1} \Psi^r_{iq} Y(1; jk \cdots \hat{q} \cdots 2) \tag{10}$$

(cf. les notations de I.34(4) pour l'analogie).

D'après (6), I.10(2) et I.14(1), c'est un élément de $U(\mathfrak{p})\,Z(\mathfrak{g})_{k-1}$. On pose aussi

$$\tilde{f}_j = \sum_{s=0}^{k-1} v_s\, \tilde{\Psi}^{k-s}_{k+1\,j}.$$

On suppose que $j$ est strictement supérieur à $k+1$, alors d'après (3) on a:

$$\tilde{f}_j \in I'. \tag{11}$$

Avec les notations de (4), (5) et (6), d'après (6) et I.29(1) (plus les notations de I.34(3)), le coefficient de $Z_{r-s}$ dans $\tilde{\Psi}^r_{k+1\,j}$ est:

$$\tilde{\Phi}^s_{k+1\,j} + \sum_{m=1}^{s-1} a_m \tilde{\Phi}^{s-m}_{k+1\,j};$$

d'où finalement, il existe un ensemble de nombres complexes (indépendant de $j$), noté $(c_m(s))_{1\leqslant s\leqslant r-1,\,1\leqslant m\leqslant r-1}$ tel que l'on ait (cf. (11) et (6)):

$$\sum_{s=1}^{k-1} Z_{k-s}\left(\tilde{\Phi}^s_{k+1\,j} + \sum_{m=1}^{s-1} c_m(s)\,\tilde{\Phi}^{s-m}_{k+1\,j}\right) \in I' + U(\mathfrak{p}). \tag{12}$$

Soit $s$ un entier et $\{j\}$ un élément de $E_s$; on note $\tilde{Y}(k+1;\{j\})$ le déterminant de la matrice $s\times s$ notée $(a_{vw})$ où l'on a:

$$a_{vw} = \tilde{\Phi}^{s-w+1}_{k+1\,j_v};$$

et avec les notations de I.34 en supposant que $\{j\}$ est un élément de $E''_s$, on note: $Y''(k+1;\{j\})$ le déterminant de la matrice $s\times s$ notée $b_{vw}$, où l'on a:

$$b_{vw} = {}''\Phi^{s-w+1}_{k+1\,j_v}.$$

D'après II.18 (et sa notation $\Delta$), soit $L$ un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ coupant $U(\mathfrak{p})$ suivant $J$ donc en particulier de niveau $k$, on a $(\Delta)^{s(s+1)/2}\theta(Y''(k+1,\{j\})) - \Delta^{s(s-1)/2}\tilde{Y}(k+1,\{j\}) \in L$ (on a utilisé le fait que $\Delta$ commute à l'image de $\theta$; cf. I.27, et la définition d'un déterminant cf. 0.(2)).

D'où

$$(\Delta)^{s(s+1)/2}\theta(Y''(k+1,\{j\})) - \Delta^{s(s-1)/2}\tilde{Y}(k+1,\{j\}) \in I'. \tag{13}$$

On démontre de manière identique (nous l'avons déjà utilisé dans la démonstration de II.19) que l'on a, si $\{j\}$ est un $s$-uple d'entiers strictement supérieurs à $k+1$:

$$Y(k+1;\{j\};s-q,s-1,\ldots,1) \in I', \qquad \forall 1\leqslant q\leqslant s. \tag{14}$$

On fixe maintenant $t-1$ entiers distincts compris entre $k+2$ et $n$ au sens large (c'est possible par définition de $t$) notés $j_1 \cdots j_{t-1}$ et par définition de $t$ (cf. II.4 appliqué à $\mathfrak{g}_k$ au lieu de $\mathfrak{g}$), on a grâce à (13);

$$\tilde{Y}(k+1, j_1 \cdots j_s) \notin J, \qquad 1 \leqslant \forall s \leqslant t-1,$$

et avec (12) et (14):

$$Z_{k-s} \tilde{Y}(k+1, j_1 \cdots j_s) \in I' + U(\mathfrak{p})\, Z(\mathfrak{g})_{k-s-1}.$$

Cela termine la démonstration de (2) et la démonstration de la proposition.

## III

III.1. Dans cette partie, on étudie les idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ obtenus par induction à partir d'un idéal de codimension 1 de l'algèbre enveloppante d'une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. Ces idéaux sont dits des idéaux primitifs induits. Soit $I$ un idéal primitif induit, on note $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et $\chi$ un caractère de $\mathfrak{q}$ tel que $I$ est induit par le noyau de $\chi$ prolongé à $U(\mathfrak{g})$. On note $\tilde{\chi}$ le caractère $\chi$ translaté par le caractère de $\mathfrak{q}$ valant $-1/2$ trace ad $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ et $r(\mathfrak{q})$ une composante de Levi de $\mathfrak{q}$; soit $\gamma$ un élément de $Gl_n(\mathbb{C})$ qui stabilise $r(\mathfrak{q})$ (pour l'action adjointe) alors $\gamma\tilde{\chi}$ restreint à $r(\mathfrak{q})$ est un caractère de $r(q)$ qui se prolonge naturellement en un caractère de $\mathfrak{q}$ encore noté $\gamma\tilde{\chi}$; d'après [B, 5.4], on sait que $I$ est aussi obtenu en induisant le noyau du caractère $\gamma\tilde{\chi} + 1/2$ trace ad $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ prolongé à $U(\mathfrak{q})$. Cette section III consiste à trouver un ensemble d'éléments de $I$ dont la connaissance détermine ($\mathfrak{q}$ étant fixé) la classe de conjuguaison de $\tilde{\chi}$ sous l'action du sous-groupe de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ stabilisant $r(\mathfrak{q})$. Cet ensemble nous permettra alors de calculer $I \cap U(\mathfrak{p})$. Pour trouver ces éléments, on utilise l'orbite nilpotente définie par gr $I$ et les fonctions qui s'annulent sur cette orbite.

III.2. *Notations supplémentaires utilisées dans cette section.* Soient $I$, $\mathfrak{q}$, $r(\mathfrak{q})$, $\chi$ et $\tilde{\chi}$ comme dans III.1; mais on suppose en outre que $\mathfrak{q}$ contient les matrices triangulaires inférieures et que $r(\mathfrak{q})$ contient les matrices diagonales; comme cela est expliqué en [B] tout idéal primitif induit est induit grâce à une sous-algèbre parabolique de ce type et on peut même encore supposer, ce que nous ferons, que $\mathfrak{q}$ qui est maintenant déterminé par une partition de $n$ notée $(q_1, \ldots, q_k)$, vérifie aussi

$$q_1 \geqslant \cdots \geqslant q_k.$$

Soit $i$ un entier inférieur ou égal à $k$, on pose

$$s(0) = 0, \quad s(i) = \sum_{j \leqslant i} q_j \qquad \text{si} \quad i > 0,$$

et on note $\mathfrak{r}_i$ la sous-algèbre de $\mathfrak{q}$ engendrée en tant qu'espace vectoriel par l'ensemble des éléments $(x_{vw})_{s(i-1)<v,w\leqslant s(i)}$ et $\mathfrak{q}_i$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{q}$ et définie par la partition $(s(i), q_{i+1},..., q_k)$ de $n$. On note $Q$ (resp. $Q_i$) le sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ irréductible d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{q}_i$). Puisque $\chi$ est un caractère de $\mathfrak{q}$, on sait que l'on a:

$\chi(x_{jj}) = \chi(x_{ll})$ si $x_{jj}$ et $x_{ll}$ sont dans la même sous-algèbre de type $\mathfrak{r}_i$.

On pose, pour tout entier $i$ inférieur ou égal à $k$:

$$t_i = \chi(x_{jj}) \qquad \text{où} \quad s(i-1) < j \leqslant s(i);$$

$$t'_i = t_i + s(i-1); \tag{1}$$

$$\tilde{t}_i = \tilde{\chi}(x_{jj}).$$

On a clairement:

$$\tilde{t}_i = t'_i - 1/2(n - q_i) \tag{2}$$

On note $(q'_1,..., q'_m)$ la partition duale de $(q_1,..., q_k)$; i.e.,

$$q'_i = \#\{q_s \mid 1 \leqslant s \leqslant k \text{ et } q_s \geqslant i\}.$$

On a en particulier:

$$q'_1 = k, \qquad m = q_1, \; q'_1 \geqslant \cdots \geqslant q'_m. \tag{3}$$

Soit $\mathcal{O}$ l'orbite nilpotente de $\mathfrak{g}$ formée par l'ensemble des éléments nilpotents dont la décomposition de Jordan est formée de $m$ blocs de taille $q'_1,..., q'_m$ (à l'ordre près). C'est l'orbite de Richardson définie par $\mathfrak{q}$. On note $\bar{\mathcal{O}}$ la fermeture de $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}$ et l'on a:

$$\dim \bar{\mathcal{O}} = 2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{q} = \dim U(\mathfrak{g})/I.$$

En outre, clairement, gr $I$ est un idéal $Gl_n(\mathbb{C})$-invariant de $S(\mathfrak{g})$ inclus dans $S(\mathfrak{g})\,\mathfrak{q}$ donc nul sur $\bar{\mathcal{O}}$ identifiée à la fermeture d'une orbite de $g^*$ grâce à la forme de Killing.

On sait aussi que les éléments de $\bar{\mathcal{O}}$ sont définis par les inégalités suivantes:

$$x \in \bar{\mathcal{O}} \Leftrightarrow \forall r \leqslant k, \qquad \dim(\mathrm{Im}(x)^r) \leqslant n - s(r) \tag{4}$$

(Im := image).

Soit $r$ un entier inférieur strictement à $k$ on note $m(r)$ est le plus grand entier pour lequel $q'_{m(r)}$ est strictement supérieur à $r$ et on pose

$$m(k) = 0$$

alors (4) peut aussi s'écrire sous la forme suivante:

$$(5) \qquad x \in \bar{\mathcal{O}} \Leftrightarrow \forall r \leqslant k, \qquad \dim(\operatorname{Im}(x)^r) \leqslant \sum_{i=1}^{m(r)} q'_i$$

(un somme vide est nulle).

On utilisera souvent dans cette section les notations $T(\{i\}; \{j\}; \{m\})$, $T(\{i\}, \{j\}, m)$ de 0.(6).

III.3. Soient $r$ et $t$ des entiers positifs et $\{\alpha\}$ un $r$-uple de nombres complexes; afin d'exploiter III.2(4), on va construire, dans les paragraphes qui suivent, pour tout couple $\{i\}$, $\{j\}$ d'éléments de $E_t$ des éléments de $U(\mathfrak{g})$ notés $\bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\})$ ayant les propriétés suivantes:

(1) $\bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) - T(\{i\}; \{j\}; r) \in U(\mathfrak{g})_{tr-1}$;

(2) $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_t$, $\bar{T}(\{i\}; \sigma\{j\}; r; \{\alpha\}) = \varepsilon(\sigma)\, \bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\})$;

(3) $\bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) \in I$ si $t = n + 1 - s(r)$ et si $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ coïncide en tant qu'ensemble non ordonné à $(-t'_1, ..., -t'_r)$;

(4) $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \sigma\{\alpha\}) = \bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\})$.

En fait on construira d'abord des éléments notés $T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\})$ vérifiant (1), (2) et (3); ils vérifient probablement (4) mais pour le démontrer le calcul est pénible, on obtiendra dont $\bar{T}$ en symétrisant $T'$ en $\{\alpha\}$.

III.4. Lemme. *Soient $t$ un entier positif, $\{i\}$ un élément de $E_t$ et $\beta$ $(\{m\})_{\{m\} \in \mathbb{N}^t}$ un enesemble de nombres complexes presque tous nuls. On suppose que l'on a:*

- *tous les entiers constituant le $t$-uple $\{i\}$ sont distincts;*
- $\forall \{j\} \in E_t$, $\sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\})\, T(\{i\}; \{j\}; \{m\}) = 0$.

*Alors on a:*

$$\beta(\{m\}) = 0, \qquad \forall \{m\}.$$

On pose:

$$u := \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\})\, T(\{i\}; \{i\}; \{m\}).$$

Supposons qu'il existe $\{m\}$ tel que $\beta(\{m\})$ soit non nul et on note $M$ le plus grand entier pour lequel il existe $\{m\}$ vérifiant:

- $M = |m|$ et $\beta(\{m\}) \neq 0$.

On pose:

$$u' := \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t\, |m| = M} \beta(\{m\})\, T(\{i\}; \{i\}; \{m\}).$$

Il est clair que $u$ et $u'$ sont des éléments de $U(\mathfrak{g})_M$ et que leurs images dans $U(\mathfrak{g})_M/U(\mathfrak{g})_{M-1}$ coïncident; montrons que cette image n'est pas nulle ce qui donnera la contradiction cherchée. Comme en 0.(7) et 0.(8) on identifie $U(\mathfrak{g})_M/U(\mathfrak{g})_{M-1}$ aux fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ homogènes de degré $M$ et on note $\bar{u}$ l'image de $u'$ dans cette identification. La restriction de $\bar{u}$ aux matrices diagonales vaut (en tenant compte de l'hypothèse faite sur $\{i\}$):

$$u(x) = \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t \, |m| = M} \beta(\{m\})(x^{m_1})_{i_1 i_1} \cdots (x^{m_t})i_t i_t$$

et cette fonction est non nulle d'où le lemme.

III.5. Lemme (notation de III.4). *On suppose aussi que tous les entiers du t-uple i sont distincts et on pose pour tout élément* $\{j\}$ *de* $E_t$:

$$u(\{j\}) = \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\})\, T(\{i\}, \{j\}; \{m\}).$$

*Soient p un entier compris strictement entre* 0 *et t et $\sigma$ la transposition de p et* $p+1$; *alors on a l'équivalence suivante*:

$$\begin{aligned}
&\forall \{j\} \in E_t, \qquad u(\{j\}) + u(\sigma(\{j\})) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall \{m\} \in \mathbb{N}^t, \qquad \beta(\{m\}) - \beta(\sigma\{m\}) \\
&= \sum_{s=1}^{m_{p+1}-m_p} \beta(m_1 \cdots m_{p-1} m_{p+1} - s + 1 m_p + s \cdots m_t) \\
&\quad - \sum_{s=1}^{m_p - m_{p+1}} \beta(m_1 \cdots m_{p-1} m_p - s + 1 m_{p+1} + s \cdots m_t)
\end{aligned}$$

(une somme vide est nulle).

On utilise I.11 pour faire le calcul suivant, quels que soient $(i, j)$ et $(v, w)$ des éléments de $E_2$ et quels que soient $r$ et $r'$ des entiers:

$$\begin{aligned}
&\Phi^r_{ij} \Phi^{r'}_{vw} - \Phi^r_{vj} \Phi^{r'}_{iw} \\
&\quad = -(\Phi^{r'}_{iw} \Phi^r_{vj} - \Phi^{r'}_{vw} \Phi^r_{ij}) \\
&\quad\quad - \sum_{s \geqslant 1, s > r' - r}^{r'} (\Phi^{r'-s}_{iw} \Phi^{r+s-1}_{vj} - \Phi^{r+s-1}_{iw} \Phi^{r'-s}_{iw}) \\
&\quad\quad + \sum_{s \geqslant 1, s > r' - r}^{r'} (\Phi^{r'-s}_{vw} \Phi^{r+s-1}_{ij} - \Phi^{r+s-1}_{ij} - \Phi^{r+s-1}_{vw} \Phi^{r'-s}_{ij})
\end{aligned}$$

d'où en faisant $j$ égal à $j_p$, $w$ égal à $j_{p+1}$, $r$ égal à $m_p$ et $r'$ égal à $m_{p+1}$, on trouve

$$\begin{aligned}(1)\quad & T(\{i\};\{j\};\{m\}) \\ &= -T(\{i\};\sigma(\{j\});\sigma(\{m\})) \\ &\quad - \sum_{s\geqslant 1, s>r'-r}^{r'} T(\{i\};\sigma\{j\});m_1\cdots m_{p+1}-s m_p+s-1\cdots) \\ &\quad + \sum_{s\geqslant 1, s>r'-r}^{r'} T(\{i\};\sigma\{j\});m_1\cdots m_p+s-1\; m_{p+1}-1\cdots).\end{aligned}$$

D'où il existe un ensemble de nombres complexes (indépendants de $\{i\}$ et $\{j\}$), noté $\delta(\{m\})_{\{m\}\in\mathbb{N}^t}$, presque tous nuls tels que l'on ait:

$$u(\{j\}) = \sum_{\{m\}\in\mathbb{N}^t} \delta(\{m\})\, T(\{i\};\sigma(\{j\});\{m\}).$$

Fixons $\{m\}$ et calculons $\delta(\{m\})$ gâce à (1); il faut savoir quels sont les $t$-uples $\{m'\}$ pour lesquels on peut avoir l'une des deux possibilités suivantes:

($\alpha$) $\exists s>0$, $s\in\,]m'_{p+1}-m'_p, m'_{p+1}]$ tel que

$$m'_{p+1}-s=m_p \qquad \text{et} \qquad m'_p+s-1=m_{p+1};$$

($\beta$) $\exists s>0$, $s\in\,]m'_{p+1}-m'_p, m'_{p+1}]$ tel que

$$m'_p+s-1=m_p \qquad \text{et} \qquad m'_{p+1}-s=m_{p+1};$$

($\alpha$) et ($\beta$) sont équivalents à ($\alpha'$) et ($\beta'$) ci-dessous:

($\alpha'$) $\exists s>0$ tel que

$$m'_{p+1}=m_p+s, \qquad m'_p=m_{p+1}-s+1, \qquad s>m_p-m_{p+1}+2s-1,$$

i.e.,

$$s\leqslant m_{p-1}-m_p;$$

($\beta'$) $\exists s>0$ tel que

$$m'_p=m_p-s+1, \qquad m'_{p+1}=m_{p+1}+s, \qquad s>m_{p+1}-m_p+2s-1,$$

i.e.,

$$s\leqslant m_p-m_{p+1}.$$

D'où:

$$\delta(\{m\}) = -\beta(\sigma\{m\}) - \sum_{s=1}^{m_{p+1}-m_p} \beta(\cdots m_{p+1} - s + 1 m_p + s' \cdots)$$
$$+ \sum_{s=1}^{m_p - m_p + 1} \beta(\cdots m_p - s + 1 m_{p+1} + s \cdots),$$

et le lemme résulte alors immédiatement de III.4.

III.6. Corolaire (notations mais non hypothèse de III.5). *On suppose ici que l'on a pour la transposition $p$, $p+1$ notée $\sigma$:*

$$\forall j \in E_t, \qquad u(\sigma\{j\}) = \varepsilon(\sigma)\, u(\{j\}).$$

*Soient $s$ et $M$, $M'$ des entiers; on suppose que $s$ est positif, inférieur ou égal à $t$ et différent de $p$ et $p+1$. Alors on a: pour tout élément $\{j\}$ de $E_t$:*

$$\sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\})\, T(\{i\}; \sigma\{j\}; m_1 \cdots m_1 \cdots m_{s-1}, Mm_s + M', m_{s+1} \cdots m_t)$$
$$= \varepsilon(\sigma) \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta((\{m\})\, T(\{i\}; \{j\}; m_1 \cdots m_{s-1} Mm_s + M' \cdots m_t)$$

(*i.e., on remplace dans tout r-uple $\{m\}$, $m_s$ par $Mm_s + M'$*).

Si les entiers constituant le $t$-uple $i$ ne sont pas tous distincts tous les déterminants apparaissant ont deux lignes égales et sont donc nuls; le lemme est alors trivialement vrai; dans les autres cas le lemme résulte immédiatement de III.5.

III.7. Lemme (notations III.5). *Soit $s$ un entier positif inférieur ou égal à $t$: on* identifie $\mathfrak{S}_{t-s+1}$ *au sous-groupe de $\mathfrak{S}_t$ permutant les $t-s+1$ derniers éléments. On pose:*

$$v(\{j\}) = \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\})\, T(\{i\}; \{j\}; m_1, \ldots, m_s + 1, \ldots, m_t),$$

$$w(\{j\}) = \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\}) \sum_{p=s+1}^{t} T(\{i\}; \{j\};$$
$$\times m_1 \cdots m_{s-1}, 0, m_1 \cdots m_{p-2}, m_{p-1} + m_p, \ldots, m_t)$$

($w(\{j\}) = 0$ *si* $s = t$).

*Soit $\alpha$ un nombre complexe, on suppose que l'on a:*
$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{t-s+1}$, $u(\sigma\{j\}) = \varepsilon(\sigma)\, u(\{j\})$, *alors on a:*

$$(1) \qquad \sum_{l=1}^{n} u(j_1 \cdots j_{s-1} l j_s \cdots j_t)(x_{lj_s} + (\alpha + t - s)\, \delta_{lj_s}) = v(\{j\}) + \alpha u(\{j\}) + w(\{j\}),$$

$$(2) \qquad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{t-s},\ w(\tau\{j\}) = \varepsilon(\sigma)\, w(\{j\})$$

(*où $\mathfrak{S}_{t-s}$ est le sous-groupe de $\mathfrak{S}_t$ permettant les $t-s$ derniers éléments*).

D'après I.10(4) on a, quels que soient l'élément $i$ de $E_1$ et l'entier $m_t$:

$$\Phi^{m_t}_{ij_t} x_{lj_s} = x_{lj_s} \Phi^{m_t}_{ij_t} + \Phi^{m_t}_{ij_s} \delta_{lj_t} - \Phi^{m_t}_{lj_t} \delta_{ij_s}.$$

Cela veut dire que l'on peut faire passer $x_{lj_s}$ au-dessus de la dernière "colonne" des déterminants calculant $u(j_1 \cdots j_{s-1} \cdots j_t)$ à condition de rajouter les termes suivants:

$$f := \sum \beta(\{m\})\, T(\{i\};\ \cdots j_{s-1} j_t j_{s+1} \cdots j_{t-1} j_s;\ \{m\})$$

$$- \sum_{l=1}^{n} T(\{i\};\ \cdots j_{s-1} l j_{s+1} \cdots j_{t-1} j_s; m_1 \cdots m_{t-1} 0)\, \Phi^{m_t}_{lj_t}.$$

En utilisant les propriétés de permutation et III.6 puis le fait qu'une colonne avec des $\Phi^0_{iw}$ commute à tout autre colonne, on a:

$$f = -u(\{j\}) + \sum_{\{m\}} \beta(\{m\}) \sum_{l=1}^{n} T(\{i\};\ \cdots j_{s-1} j_s \cdots j_{t-1} l;\ \cdots m_{s-1}, 0, m_s \cdots m_{t-1})\, \Phi^{m_t}_{lj_t}.$$

Puis en utilisant I.10(1), on obtient:

$$f + u(\{j\}) = \sum_{\{m\}} \beta(\{m\})\, T(\{i\}; \{j\};\ \cdots m_{s-1}, 0, m_s \cdots, m_{t-1} + m_t).$$

En procédant de la même façon pour faire ensuite passer $x_{lj_t}$ au-dessus de l'avant dernière colonne..., on trouve finalement avec I.10(1) (notations de l'énoncé du lemme):

$$\sum_{l=1}^{n} u(j_1 \cdots j_{s-1} l j_s \cdots j_t) x_{lj_s} = v(\{j\}) - (t-s)\, u(\{j\}) + w(\{j\}).$$

(1) est alors immédiat. Démontrons (2); il est clair que le premier membre de (1) et $u(\{j\})$ ont la propriété de permutation souhaitée, $v(\{j\})]'$ à aussi grâce à III.6, d'où (2).

III.8. DÉFINITIONS (notations III.3). On pose

$$T'(\{i\};\{j\};1;\alpha_1)=D(\{i\};\{j\};\alpha_1+t-1)$$

$$T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$$

$$=\sum_{\{l\}\in E_t} T'(\{i\};\{l\};r-1;\alpha_1\cdots\alpha_{r-1})\prod_{s=1}^{t}(x_{l_s j_s}+(\alpha_r+t-s)\,\delta_{l_s j_s}).$$

III.9. LEMME (notations III.3 et III.8). *Les éléments* $T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$ *vérifient les propriétés* III.3(2) *et* III.3(1).

Montrons d'abord III.3(2) par récurrence sur $r$; pour $r$ égale 1, on l'a vu en I.2. Supposons donc que $r$ est restrictement plus grand que 1 et que le lemme soit vrai jusqu'à $r-1$; soit $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_t$; grâce à l'hypothèse de récurrence (on note $\{\hat{\alpha}\}=(\alpha_1\cdots\alpha_{r-1})$), on a:

$$\varepsilon(\sigma)\sum_{\{l\}\in E_t} T'(\{i\};\{l\};\{\hat{\alpha}\})\prod_{s=1}^{t}(x_{l_{\sigma(s)}j_s}+(\alpha_r+t-s)\,\delta_{l_{\sigma(s)}j_s})$$

$$=\sum_{\{l\}\in E_t} T'(\{i\};\sigma\{l\};\{\hat{\alpha}\})\prod_{s=1}^{t}(x_{l_{\sigma(s)}j_s}+(\alpha_r+t-s)\,\delta_{l_{\sigma(s)}})j_s$$

$$=T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\}).$$

D'où immédiatement:

$$T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$$

$$=1/t!\sum_{\{l\}\in E_t} T'(\{i\};\{l\};r-1;\{\hat{\alpha}\})\,D(\{l\};\{j\};\alpha+t-1);$$

et III.3(1) résulte donc de I.2.

Montrons maintenant III.3(1) par récurrence sur $r$; si $r$ est égal à 1 il est clair par définition que l'on a:

$$D(\{i\};\{j\};\alpha+t-1)-T(\{i\};\{j\};1)\in U(\mathfrak{g})_{r-1}$$

d'où le résultat dans ce cas. Supposons maintenant que $r$ est strictement supérieur à 1 et que le lemme est vrai pour $r-1$. Remarquons que, modulo $U(\mathfrak{g})_{tr-1}$, on a:

$$\sum_{\{l\}\in E_t} T'(\{i\};\{l\};r-1)\left(\prod_{s=1}^{t} x_{l_s}j_s\right)$$

est égal au déterminant de la matrice $t \times t$ notée $(a_{vw})$ où l'on a, avec l'hypothèse de récurrence:

$$a_{vw} = \sum_{l_w = 1}^{n} \Phi^{r-1}_{i_v l_w} x_{l_w j_w} = \Phi^{r}_{i_v j_w}$$

d'où le résultat.

III.10. *Notations.* Soit $r$ un entier positif

(1) Soient $\{y\} = (y_1, ..., y_r)$ un $r$-uple de nombres complexes et $s$ un entier inférieur ou égal à $r$, on note $S_s(\{y\})$ la fonction symétrique homogène en $\{y\}$ somme des monomes distincts $y_{i_1} \cdots y_{i_s}$ où chaque $y_j$ intervient au plus une fois; $(S_0(\{y\}) = 1)$. On note $\{y\}$ le $r-1$ uple $y_1 \cdots y_{r-1}$ et $\hat{S}_s(\{\hat{y}\})$ les fonctions symétriques en $\{\hat{y}\}$; ici $s$ est inférieur ou égal à $r-1$. On supprime $\{y\}$ des notations quand il n'y a pas d'ambiguïté.

(2) Soit $t$ un entier positif, on note $\Lambda(r, t)$ l'ensemble des $t$-uples d'entiers compris entre 0 et $r$ au sens large; on note $\Lambda$ au lieu de $\Lambda(r, t)$ quand $r$ et $t$ sont fixés.

III.11. Lemme (notations III.8 et III.10, ici les nombres complexes variables sont les $\{\alpha\}$). *On fixe $r$ et $t$ des entiers positifs, alors il existe un ensemble de polynômes en les $\alpha_i$, noté $(\beta(\{m\}))_{\{m\} \in \mathbb{N}^t}$ tel que l'on ait, quels que soient $\{i\}$, $\{j\}$ et $\{\alpha\}$:*

- $d^0\beta(\{m\}) < tr - |m|$ $\qquad$ ($d^0$ := degré total du polynôme);
- $T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\})$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda_1} S_{\lambda_t} T(\{i\}; \{j\}; r - \lambda_1, ..., r - \lambda_t)$$

$$+ \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\})\, T(\{i\}; \{j\}; \{m\})$$

(en tant que polynomes en $\{\alpha\}$ où $S_\lambda := S_\lambda(\{\alpha\})$.

On démontre d'abord, par récurrence sur $r$, que $T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\})$ est la somme du déterminant de la matrice $A_r$ définie ci-dessous et de termes de la forme $\beta(\{m\})$ $T(\{i\}; \{j\}; \{m\})$ où $\beta(\{m\})$ a les propriétés de l'énoncé du lemme.

$A_r$ est la matrice $t \times t$, notée $(a_{vw}(r))$, où l'on a:

(1) $$a_{vw}(r) = \sum_{\{d\} \in E_{r-1}} (x_{i_v d_1} + \alpha_1 \delta_{i_v d_1}) \cdots (x_{d_{r-1} j_w} + \alpha_r \delta_{d_{r-1} j_w}).$$

C'est clair pour $r$ égal à 1 et pour $r$ quelconque. Cela résulte de l'hypothèse de récurrence et du lemme III.7. Le calcul de $a_{rw}(r)$ (avec les notations (1)) se fait grâce à I.10(1): admettant que $a_{rw}(r-1)$ soit égal à $\sum_{s=0}^{r-1} \hat{S}_s \Phi_{i_r j_w}^{r-1-s}$, on trouve:

$$a_{rw}(r) = \sum_{s=0}^{r-s} \sum_{d=1}^{n} \hat{S}_s \Phi_{i_r d}^{r-1-s}(x_{dj_w} + \alpha_r \delta_{dj_w})$$
$$= \Phi_{i_r j_w}^{r} + \sum_{s=1}^{r-1} (\hat{S}_s + \alpha_r \hat{S}_{s-1}) \Phi_{i_r j_w}^{r-s} + \alpha_r \hat{S}_{r-1} \delta_{i_r j_w}.$$

D'où:

$$a_{rw}(r) = \sum_{s=0}^{d} S_s \Phi_{i_r j_w}^{r-s}.$$

Le lemme devient alors clair en utilisant la bilinéarité du déterminant considéré comme fonction des colonnes (cf. 0.(2)).

III.12. Lemme (notations III.10(1) et III.8). *L'entier $r$ étant fixé, il existe un ensemble de polynômes en les $\alpha_i$, noté $(\beta(\{m\}))_{\{m\} \in \mathbb{N}^t}$, presque tous nuls, vérifiant*:

- $\beta(\{m\}) = 0 \quad$ si $\quad m_t < r$
- $T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) = \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} \beta(\{m\}) \sum_{s=0}^{r} S_s T(\{i\}; \{j\};$ $m_1 \cdots m_{t-1} m_t - s)$.

Le lemme est clair pour $r$ égal 1, puisque la dernière colonne de la matrice dont le déterminant calcule $D(\{i\}; \{j\}; \alpha + t - 1)$ est $(x_{i_r j_t} + \alpha \delta_{i_r j_t})_{1 \leq r \leq t}$. Et on démontre le lemme par récurrence sur $r$; on admet que $T'(\{i\}; \{j\}; r-1; \{\hat{\alpha}\})$ (où $\{\hat{\alpha}\} = \{\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}\}$; cf. III.10(1)), noté ici $\hat{u}(\{j\})$, est une combinaison linéaire finie à coefficients polynomiaux en $\{\hat{\alpha}\}$ de termes de la forme suivante:

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{r-s} \hat{S}_s T(\{i\}; \{j\}; m_1 \cdots m_{t-1} m_t - s),$$

où $m_t$ est supérieur ou égal à $r-1$. Grâce à III.7, on voit que l'élément suivant de $U(\mathfrak{g})$:

$$\hat{u}_1(l_2 \cdots l_t) := \sum_{l_1=1}^{n} \hat{u}(l_1 l_2 \cdots l_t)(x_{l_1 j_1} + (\alpha_r + t - s)\, \delta_{l_1 j_1})$$

est une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux en $\{\alpha\}$ de termes du même type que précédemment (cf. (1) (où $\{j\}=(j_1 l_2 \cdots l_t)$). De plus, quel que soit l'élément $\sigma$ de $\mathfrak{S}_{t-1}$, on a

$$\hat{u}_1(\sigma(l_2 \cdots l_t)) = \varepsilon(\sigma)\,\hat{u}_1(l_2 \cdots l_t).$$

On peut donc utiliser III.7 de proche en proche pour voir que

$$\sum_{(l_1 \cdots l_{t-1}) \in E_{t-1}} \hat{u}(i_1 \cdots l_{t-1} l_t) \prod_{s=1}^{t-1} (x_{l_s j_s} + (\alpha_r + t - s)\,\delta_{l_s j_s}))$$

est une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux en $\{\alpha\}$ d'éléments de même type que (1), où $j$ est remplacé par $(j_1 \cdots j_{t-1} l_t)$; puis on somme sur $l_t$ un élément du type (1), i.e. (cf. I.10.4),

$$\begin{aligned}\sum_{l_t=1}^{n} \sum_{s=0}^{r-1} &\hat{S}_s T(\{i\}; j_1 \cdots j_{t-1} l_t; m_1 \cdots m_{t-1} m_t - s)(x_{l_t j_t} + \alpha_r\,\delta_{l_t j_t})\\ &= T(\{i\}; \{j\}; m_1 \cdots m_{t-1} m_t + 1)\\ &\quad + \sum_{s=1}^{r-1} (\hat{S}_s + \alpha_r \hat{S}_{s-1})\, T(\{i\}; \{j\}; m_1 \cdots m_{t-1} m_t + 1 - s)\\ &\quad + \alpha_r \hat{S}_{r-1} T(\{i\}; \{j\}; m_1 \cdots m_{t-1} m_t + 1 - r).\end{aligned}$$

D'où le lemme.

III.13. Lemme (notations III.2 et III.10(1)). *Soit $r$ un entier compris entre 1 et $k$ au sens large; on note $\mathfrak{q}_\chi$ le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{q})$ engendré par l'ensemble des éléments $(x-\chi(x))_{x \in \mathfrak{q}}$ $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant s(r)$,*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s S_s(t'_1 \cdots t'_r)\,\Phi_{ij}^{r-s} \in \bigcap_{\gamma \in Q_r} \gamma U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{q}_\chi.$$

Soient $(i, j)$ un élément de $E_2$ et $r$ un entier positif, on pose:

$$a(i, j, r) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s S_s(t'_1 \cdots t'_r)\,\Phi_{ij}^{r-s}.$$

Montrons d'abord que le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $a(i, j, r)$, quand $(i, j)$ varie en restant soumis aux conditions de l'énoncé du lemme, est stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{q}_r$:

soit $x_{vw}$ un élément de $\mathfrak{q}_r$; alors $w$ est un entier inférieur ou égal à $s(r)$ par définition de $\mathfrak{q}_r$ et d'après I.10(4), on a:

$$[a(i, j, r), x_{vw}] = a(i, w, r)\,\delta_{vj} - a(v, j, r)\,\delta_{iw},$$

d'où l'assertion.

Il suffit donc, pour démontrer le lemme, de vérifier que l'on a:

$$(1) \qquad \forall (i, j) \in E_2,\ 1 \leqslant j \leqslant s(r), \qquad a(i, j, r) \in U(\mathfrak{g})\, \mathfrak{q}_\chi.$$

Cela se fait par récurrence sur $r$. Regardons le cas où $r$ égale 1; dans ce cas on a:

$$a(i, j, 1) = x_{ij} - t'_1\, \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant q_1;$$

c'est un élément de $\mathfrak{q}_\chi$ par définition de $\mathfrak{q}_\chi$, d'où (1) dans ce cas. Supposons maintenant que $r$ est strictement supérieur à 1 et que (1) est vrai jusqu'à $r-1$; d'après I.10(1), on a (notations III.10(1), où $\{y\} = \{-t'\}$):

$$(2) \qquad \sum_{l=1}^{n} a(i, l, r-1)(x_{lj} - t'_r\, \delta_{lj})$$
$$= \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s \hat{S}_s(\Phi_{ij}^{r-s} - t'_r \Phi_{ij}^{r-1-s})$$
$$= \sum_{s=0}^{r} (-1)^s S_s \Phi_{ij}^{r-s} = a(i, j, r).$$

De plus, avec I.10(4), on a:

$$[a(i, l, r-1), x_{lj}] = a(i, j, r-1) - \delta_{ij} a(l, l, r-1)$$

d'où (2) s'écrit aussi:

$$a(i, j, r) = \sum_{l \leqslant s(r-1)} ((x_{lj} - t'_r\, \delta_{lj})\, a(i, l, r-1) - \delta_{ij} a(l, l, r-1)) + s(r-1)\, a(i, j, r-1) + \sum_{l > s(r)} a(i, l, r-1)(x_{lj} - t'_r\, \delta_{lj}).$$

en utilisant la définition de $t'_r$, i.e.:

$$t'_r = t_r + s(r-1),$$

on obtient:

$$a(i, j, r) = \sum_{l \leqslant s(r-1)} ((x_{lj} - t_r\, \delta_{lj})\, a(i, l, r-1) - \delta_{ij} a(l, l, r-1)) + \sum_{l > s(r)} a(i, l, r-1)(x_{lj} - t_r\, \delta_{lj}).$$

(1) résulte alors de l'hypothèse de récurrence et de la définition de $\mathfrak{q}_\chi$.

III.14. COROLLAIRE (notations III.8 et III.3). *Soit* $(v, w)$ *un élément de* $E_2$ *alors on a*:

$$\begin{aligned}[T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\}), x_{vw}]\\ &= \sum_{s=1}^{t} (-1)^{s-1}(T'(\{i\};wj_1\cdots\hat{j}_s\cdots j_r;r;\{\alpha\})\,\delta_{vj_s}\\ &\quad - T'(vi_1\cdots\hat{\imath}_s\cdots i_t;\{j\};r;\{\alpha\})\,\delta_{i_sw}.\end{aligned}$$

(2) *Les éléments* $T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$ *vérifient* III.3(3)

(3) *L'idéal* $I$ *est de niveau* $k$.

(1) est un corollaire immédiat de III.11 et I.10(4),

(2) On suppose que $t$ est égal à $n-s(r)+1$ et que $\{\alpha\}$ est le $r$-uple $(-t'_1,\ldots,-t'_r)$ à permutation près comme dans III.3(3); soient $\{i\}$ et $\{j\}$ deux $t$-uples; deux cas sont possibles:

1*er cas.* Les entiers constituant le $t$-uple $\{j\}$ ne sont pas tous distincts et alors, d'après III.9 qui démontre III.3(2), on a:

$$T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})=0.$$

2*ème cas,* Il existe un entier, noté $j_s$, du $t$-uple $\{j\}$ qui est inférieur ou égal à $s(r)$; on note $\sigma$ la transposition de $s$ et $t$ et d'après III.9, puis III.12 et III.13, on a:

$$T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\}) = -T(\{i\};\sigma\{j\};r;\{\alpha\}) \in U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{q}_\chi.$$

On a ainsi vérifié que le sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$ engendré par l'ensemble des éléments $T'(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$ où $\{i\}$ et $\{j\}$ varient dans $E_t$ est inclus dans $U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{q}_\chi$; (2) résulte alors de (1) et de la définition de $I$ comme idéal induit.

(3) On fait $r$ égal $k$ dans III.13 et on voit que $I$ contient l'élément suivant

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s S_s(t'_1\cdots t'_r)\,\Phi_{ij}^{k-s},$$

quel que soit $(i, j)$ dans $E_2$; d'après II.16(2) cela montre que $I$ est de niveau inférieur ou égal à $k$. Notons $k'$ le niveau de $I$; alors II.16(2) montre que gr $I$ contient l'élément gr $\Phi_{ij}^{k'}$ (cf. 0.8)) quel que soit $(i, j)$ dans $E_2$ et donc que tout élément de $\mathcal{O}$ (cf. III.2) a son plus grand bloc de Jordan de taille inférieur ou égal à $k'$; or le plus grand bloc de Jordan d'un élément de $\mathcal{O}$ est de taille $k$ (cf. III.2) d'où l'égalité de $k$ et $k'$.

III.15. DÉFINITION. Soient $r$, $\{i\}$, $\{j\}$, $\{\alpha\}$ comme en III.3; avec les notations de III.8, on pose:

$$\bar{T}(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\}) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} T'(\{i\};\{j\};r;\sigma(\{\alpha\}));$$

cette définition et III.9 et III.14(2) entraînent immédiatement que l'ensemble des éléments $\bar{T}(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$ vérifient III.3(1)–(4).

Remarquons de plus que l'on a:

(1) III.11 est vrai en remplaçant $T'(\ )$ par $\bar{T}(\ )$ et $\beta(\{m\})$ par le polynôme $\beta(\{m\})$ symétrise en $\{\alpha\}$; on le notera $\bar{\beta}(\{m\})$ pour y référer.

(2) III.14(1) est vrai en remplaçant $T'(\ )$ par $\bar{T}(\ )$.

III.16. PROPOSITION (notation III.2 et III.15). *Soit $L$ un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ induit grâce à un idéal de codimension 1 de $U(\mathfrak{q})$. Alors $L$ coïncide avec $I$ si et seulement si $L$ contient l'ensemble des éléments suivants*:

$$\bar{T}(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\}) \qquad où\ 1 \leqslant r \leqslant k;\ t = n - s(r) + 1;$$

$$\forall \{i\}, \{j\} \in E_t; \qquad \{\alpha\} = (-t'_1, \ldots, -t'_r).$$

Grâce à III.15, il suffit de démontrer l'implication réciproque de l'énoncé de la proposition. Comme en III.2, on note $q'_1, \ldots, q'_m = \{q'\}$ la partition duale de $q_1, \ldots, q_k$ et on note $(r(1), \ldots, r(v))$ le sous-ensemble de $\{q'\}$ formé des entiers distincts ordonnés de telle façon que l'on ait:

$$k = r(1) > \cdots > r(v).$$

Soit $w$ un entier compris entre 1 et $v$ au sens large, notons $m'(w)$, le plus grand entier pour lequel on a:

$$q'_{m'(w)} = r(w).$$

On a en particulier que $m'(v)$ égale $m$. On voit alors facilement que la partition $(q_1, \ldots, q_k)$ de $n$ a les propriétés suivantes:

(1) $q_1 = \cdots = q_{r(v)} = m$; $q_{r(v)+1} = q_{r(v+1)} = m'(v+1)$; $q_{r(2)+1} = \cdots = q_k = m'(1)$.

Notons $\lambda$ un caractère de $\mathfrak{q}$ grâce auquel $L$ est obtenu par induction; on note $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$ (resp. $\tilde{\lambda}_1 \cdots \tilde{\lambda}_k$) les éléments obtenus de manière analogue aux $t'$ (resp. $\tilde{t}$) mais en changeant $\chi$ en $\lambda$.

(2) La démonstration consiste à montrer de proche en proche que les $r(v)$ fonctions symétriques en $\lambda'_1 \cdots \lambda'_{r(v)}$ coïncident avec les mêmes fonctions symétriques calculées en $t'_1 \cdots t'_{r(v)}$ puis le même résultat en remplaçant $r(v)$ par $r(v-1)$ et caetera jusqu'à $r(1)$ (égal $k$). Admettons momentanément ce résultat et terminons la démonstration:

L'assertation (2) admise, (1) et III.2(2) montre que le caractère $\tilde{\lambda}$ est conjugué du caractère $\tilde{\chi}$ par un élément de $Gl_n(\mathbb{C})$ (représentant une permutation) qui laisse stable $r(\mathfrak{q})$ (i.e., la composante de Levi de $\mathfrak{q}$ contenant les matrices diagonales); la proposition résulte alors de ce qui a été dit en III.1.

Montrons (2); admettant, par convention, que $r(v+1)$ est nul, on fixe un entier $w$, compris entre 1 et $v$ au sens large, et on suppose que les $r(w+1)$ fonctions symétriques en $\lambda'_1, ..., \lambda'_{r(w+1)}$ et $t'_1, ..., t'_{r(w+1)}$ coïncident (hypothèse vide si $w$ égale $v$) et on va montrer le même résultat pour $r(w)$. Ici on pose:

(3) • $r = r(w)$, $l$ le plus grand entier pour lequel $q'_l$ est strictement supérieur à $r$ (s'il n'existe pas, on pose $l$ égal 0)

• $t = n + 1 - s(r) = (q'_1 - r) + \cdots + (q'_l - r) + 1$
($t = 1$ si $l = 0$),

• $\{\alpha\} = (-t'_1, ..., -t'_r)$,

• $\{\beta\} = (-\lambda'_1, ..., -\lambda'_r)$.

D'après III.15 et l'hypothèse de la proposition réciproque on sait que $L$ contient l'ensemble des éléments suivants:

$u(\{i\}; \{j\}) := \bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) - \bar{T}(\{i\}; \{j\}; r; \{\beta\})$ où $\{i\}$ et $\{j\}$ parcourent $E_t$.

On note $c$ le plus grand entier positif inférieur ou égal à $r+1$ pour lequel on a les égalités suivantes:

(4) $\forall 0 \leqslant s \leqslant c-1$, $S_s(\{\alpha\}) = S_s(\{\beta\})$; et il faut démontrer que $c$ coïncide avec $r+1$; supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

D'après (4) et III.15(2), on sait qu'il existe un ensemble de polynômes symétriques noté $(\bar{\beta}(\{m\}))$ (où $\{m\} \in \mathbb{N}^t$) en $r$ variables qui vérifient (5), (6) et (7) ci-dessous:

(5) $d^0\bar{\beta}(\{m\}) \leqslant tr - |m|$ ($d^0 :=$ degré total du polynôme),

(6) $\bar{\beta}(\{m\})$ est nul ou est une combinaison linéaire de monômes de la forme $\prod_{s=1}^{r} S_s(\{y\})^{n_s}$ où au moins un des entiers $n_s$ est positif pour une valeur de $s$ supérieur ou égal à $c$

(7) (notant $\Lambda_c$ le sous-ensemble de $\Lambda(r, t)$, cf. III.10(2) formé des $t$-uples contenant au moins un entier supérieur ou égal à $c$)

$$\begin{aligned} u(\{i\}; \{j\}) = \sum_{\lambda \in \Lambda_c} & (S_{\lambda_1}(\{\alpha\}) \cdots S_{\lambda_t}(\{\alpha\}) - S_{\lambda_1}(\{\beta\} \cdots S_{\lambda_t}(\{\beta\})) \\ & \times T(\{i\}; \{j\}; r - \lambda_1, ..., r - \lambda_t) \\ & + \sum_{\{m\} \in \mathbb{N}^t} (\bar{\beta}(\{m\})(\{\alpha\}) - \bar{\beta}(\{m\})(\{\beta\}))\, T(\{i\}; \{j\}; \{m\}). \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a, grâce à (5) et (6):

$$\bar{\beta}(\{m\}) \neq 0 \Rightarrow |m| < tr - c.$$

Ainsi (7) montre que l'image de $u(\{i\};\{j\})$ dans $U(\mathfrak{g})_{tr-c}/U(\mathfrak{g})_{tr-c-1}$ coïncide avec elle de $(S_c(\{\alpha\}) - S_c(\{\beta\}))\ \sum_{s=1}^{t} T(\{i\};\{j\};r-\delta_{1s}c,..., r-\delta_{ts}c)$ on la note $S_c(\{\alpha\}) - S_c(\{\beta\})\ \bar{u}(\{i\};\{j\})$. On identifie $\bar{u}(\{i\};\{j\})$ à une fonction sur $\mathfrak{g}$ homogène de degré $tr-c$ et on va montrer que $\bar{u}(\{i\};\{j\})$ ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$ pour les valeurs suivantes de $\{i\}$ et $\{j\}$:

(8) $(j_1 \cdots j_{t-1}) = (1,..., q'_1 - r, q'_1 + 1,..., q'_1 + q'_2 - r,..., \quad q'_1 + \cdots + q'_l - r)$, $(i_1,..., i_{t-1}) = (j_1 + r,..., j_{t-1} + r)$, $j_t = q'_1 + \cdots + q'_l + 1$, $i_t = j_t + r - c$.

On note $x$ l'élément de $\mathcal{O}$ qui est nilpotent supérieur et qui est sous forme normal de Jordan, i.e.,

(9) soit $x = x_{12} + \cdots + x_{q'_1-1,q'_1} + \cdots x_{q'_1 \cdots + q'_{b-1}, q'_1 + \cdots q'_b}$, où $b$ est le plus grand entier pour lequel $q'_b$ est strictement plus grand que 1, soit si cet entier n'existe pas $\mathcal{O}$ est l'orbite de 0. Examinons ce dernier cas d'abord: i.e., $\mathcal{O} = \{0\}$.

Alors $r$ égale $t$ égale 1 et $\mathfrak{q}$ coïncide avec $\mathfrak{g}$; l'élément $T(\{i\};\{j\};1;\{\alpha\})$ est $x_{ij} + \alpha\delta_{ij}$ et le résultat est clair. Revenons au cas où $x$ est l'élément (9) et calculons $\bar{u}(\{i\};\{j\})(x)$ avec les notations de (8); on a:

$\bar{u}(\{i\};\{j\})(x)$ est la somme de déterminants des $t$ matrices $t \times t$ suivantes ($s$ varie de 1 à $t$) (cf. 0.(8))

$$A(s) = (a_{vw}(s)) \qquad \text{où} \qquad a_{vw}(s) = (x^{r - c\delta_{sw}})\, j_w i_v,$$

avec la convention habituelle $(x^0)_{ij} = \delta_{ij}$.

Si $s$ est strictement inférieur à $t$ la dernière colonne de $A(s)$ est nulle, par contre si $s$ est égal à $t$ alors $A(t)$ est la matrice identité d'où:

$$\bar{u}(\{i\};\{j\})(x) = 1.$$

Remarquons maintenant que $\mathcal{O}$ est aussi l'orbite nilpotente définie par gr $L$ et il est donc nécessaire que l'on ait:

$$S_c(\{\alpha\}) = S_c(\{\beta\}),$$

et cela donne la contradiction cherchée en (4) et termine la démonstration.

III.17. Nous allons exploiter III.16, pour calculer $I \cap U(\mathfrak{p})$; d'après III.14(3) l'idéal $I$ est de niveau $k$; on reprend les notations $I$, $\mathfrak{g}_k$, $m(k)$ (noté $m$ ici) de II.3 et I.24; on reprend aussi les notions $E''_r$, $''\Phi^r_{ij} \cdots$ de I.34. On définit dans $U(\mathfrak{g}_k)$ des éléments $''\bar{T}(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$ et $''T'(\{i\};$

$\{j\}; r; \{\alpha\})$ de la même façon que dans $U(\mathfrak{g})$. De plus soient $r$ et $t$ des entiers vérifiant les inégalités suivantes:

(1) $$0 < r \leqslant k \quad \text{et} \quad k - r \leqslant t.$$

On définit $E(r, t)^{\pm}$ de la façon suivante:

- si $r$ est égal à $k$: $E(r, t)^{\pm} = E''_t$,
- si $r$ est différent de $k$:

$$E(r, t)^{-} = \{(i_1 \cdots i_t) \in E_t \mid i_s > k \text{ si } s > k - r,\ i_1 = 1, ..., i_{k-r} = k - r\},$$

$$E(r, t)^{+} = \{(i_1 \cdots i_t) \in E_t \mid i_s > k \text{ si } s > k - r,\ i_1 = r + 1, ..., i_{k-r} = k\}.$$

Ces ensembles sont en bijection avec $E''_{t-k+r}$ et on notera $\{i\}$ l'élément correspondant, i.e.,

$$\{i\} = (i_{k-r+1} \cdots i_t).$$

III.18. LEMME (notations III.17). *Soient $r$ et $t$ des entiers vérifiant* III.17(1); *alors quels que soient les éléments $\{i\}$ et $\{j\}$ de $E(r, t)^-$ et $E(r, t)^+$ respectivement et quel que soit l'élément $\{\alpha\}$ de $\mathbb{C}^r$, on a*:

$$T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) - {}''T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) \in U(\mathfrak{g})\, m.$$

On fixe $\{i\}$, $\{j\}$ et $\{\alpha\}$ comme dans l'énoncé du lemme; soient $\sigma$ un élément de $\mathfrak{S}_t$ et $\{l_v(s)\}_{1 \leqslant v \leqslant t, 1 \leqslant s \leqslant r-1}$ un élément de $E_{t(r-1)}$; on pose:

$$l_v(0) = i_{\sigma(v)}, \qquad l_v(r) = j_v,$$

$$\tilde{x}_{l_v(s) l_v(s+1)} = x_{l_v(s) l_v(s+1)} + (\alpha_s + (t - v))\, \delta_{l_v(s) l_v(s+1)},$$

quels que soient les entiers $v$ et $s$ compris entre 1 et 0 et $r - 1$ respectivement (au sens large). On pose:

(*) $$u_\sigma(\{l_v(s)\}) = \prod_{s=0}^{r-1} \prod_{v=1}^{t} \tilde{x}_{l_v(s) l_v(s+1)};$$

et on a par définition:

(1) $$T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) = \sum_{\sigma, \{(l_v(s)\}} \varepsilon(\sigma)\, u_\sigma(\{l_v(s)\}).$$

On fixe maintenant $\sigma$ et $\{l_v(s)\}$ $(1 \leqslant v \leqslant t,\ 0 \leqslant s \leqslant r)$ comme plus haut et on note $u$ au lieu de $u_\sigma(\{l_v(s)\})$. On va démontrer que l'on a:

(2) $u \in U(\mathfrak{g})\, m$ sauf si $\{l_v(s)\}$ satisfait à:

- $l_v(s) = s + v$ quand $1 \leqslant v \leqslant k - r$ et $0 \leqslant s \leqslant r$,
- $l_v(s) > k$ *sinon*,

et dans ce cas on a:

$$u-\prod_{s=0}^{r-1}\prod_{v=k}^{r+1}\tilde{x}_{l_v(s)l_v(s+1)}\in U(\mathfrak{g})\,m.$$

Il est clair qu'avec (1) cela terminera la démonstration. Prouvons (2).

(**) Pour cela on définit les entiers relatifs suivants: soit $s_1$ le plus grand entier, s'il existe, pour lequel il y a un entier $v$ tel que $l_v(s_1)$ soit égal à 1; on choisit alors $v_1$ maximal pour cette propriété mais si $s_1$ n'existe pas de cette façon, on définit $s_1$ et $v_1$ comme étant égaux à $-1$. On définit de la même façon $(s_2, v_2)$ (i.e., $l_{v_2}(s_2)=2$, ou $l_v(s)\neq 2$, $\forall v, s,...)\cdots(s_k v_k))$. Supposons d'abord que $k-r$ est un entier positif; dans ce cas, puisque $i_1$ est égal à 1, $s_1$ et $v_1$ sont des entiers positifs et $s_1$ est strictement inférieur à $r$ par définition de $\{j\}$; soit $w$ un entier plus grand que 1 et admettons que nous ayons démontré soit que $u$ est dans $U(\mathfrak{g})\,m$, soit que les propriétés suivantes sont vérifiées $(w\leqslant k)$:

(3) $$0\leqslant s_1<s_2\cdots<s_{w-1}<r,$$

(4) $$s_1+1=s_2\Rightarrow v_1\leqslant v_2,..., s_{w-1}+1=s_{w-2}\Rightarrow v_{w-2}\leqslant v_{w-1};$$

et supposons d'abord que l'on ait:

$$s_{w-1}\geqslant s_w \qquad \text{ou} \qquad s_{w-1}=s_w^{-1} \text{ et } v_w<v_{w-1}$$

et montrons qu'alors $u$ est un élément de $U(\mathfrak{g})\,m$; ces hypothèses et les définitions de $(s_w, v_w)(s_{w-1}, v_{w-1})$ entraînent que l'on a:

- $l:=l_{w-1}(s_w+1)>w$; $\tilde{x}_{w-1,l}=x_{w-1,l}$;
- il n'existe pas de terme plus à droite que $x_{w-1l}$ dans l'écriture de $u$ (cf. (*)) de la forme $x_{jw}+a\delta_{jw}$ ou $x_{jw-1}+b\delta_{jw-1}$ ou $x_{pm'}+c\delta_{pm'}$ où $m'$ est inférieur ou égal à $w$ et $a, b, c$ sont des éléments de $\mathbb{C}$.

Ainsi on voit que toute relation de commutation entre un élément de type $x_{w-1p}$ (où $p$ est supérieur strictement à $W$) et un terme plus à droite que $x_{w-1l}$ dans l'écriture de $u$ fait éventuellement apparaître un élément de la forme $x_{w-1m'}$ où $m'$ est strictement plus grand que $w$ et pas d'autres termes. Par définition de $m$, cela prouve que $u$ appartient à $U(\mathfrak{g})\,m$.

Supposons maintenant que l'on ait en plus de (3) et (4)

(5) $$s_{w-1}<s_w=r,$$

(6) $$s_w=s_{w-1}+1\Rightarrow v_w\geqslant v_{w-1}.$$

Grâce à (3) et (5) et l'hypothèse faite sur $\{j\}$, on a:

$$r\geqslant w-1; \qquad w=j_{v_w}\geqslant r+1$$

d'où

$$r = w - 1 \qquad \text{et} \qquad v_w = 1,$$
$$s_1 = 0,\, s_2 = 1, \ldots, s_{w-1} = w - 2 = r - 1,$$
$$v_1 = \cdots = v_w = 1.$$

(cf. (∗∗)) soit différent de $(-1, -1)$, supposons que $u$ ne soit pas dans $U(\mathfrak{g})\, m$ et qu'il existe $w$ (entre $k - r + 1$ et $k$) tel que $(s_w, v_w)$ est différent de $(-1, -1)$ et fixons $w$ maximum avec cette propriété; on remarque grâce à (8) que $v_w$ est strictement supérieur à $k - r$ et grâce à l'hypothèse faite sur $\{j\}$, cela entraîne que $s_w$ est strictement inférieur à $r$; on pose:

$$l_{v_w}(s_w) = l, \qquad l_{v_w}(s_w + 1) = l'.$$

Par maximalité de $w$ l'entier $l'$ est plus grand que $k$ et il n'existe pas dans l'écriture de $u''$ (cf. (8)) de terme plus à droite que $\tilde{x}_{ll'}$ (égal $x_{ll'}$) de la forme $x_{ab} + \beta\delta_{ab}$ où $b$ est enférieur ou égal à $k$ et $\beta$ est un nombre complexe. Il est alors clair, par définition de $m$, que $u$ est dans $U(\mathfrak{g})\, m$, ce qui est la contradiction cherchée et termine la démonstration.

Ainsi nous avons démontré que deux cas sont possibles

- soit $u$ appartient à $U(\mathfrak{g})\, m$;
- soit $l_1(0) = 1$ (i.e., $\tau(1) = 1$), $l_1(1) = 2, \ldots, l_1(r) = r + 1$, et pour $p$ compris entre 0 et $r - 1$ au sens large, il n'existe dans $u$ (cf. (∗)) de terme plus à droite que $\tilde{x}_{l_1(p) l_1(p+1)}$ (égal $x_{p+1\, p+2}$) de la forme $x_{p+2j} + a\delta_{p+2j}$ (où $a$ est un élément de $\mathbb{C}$) que si $j$ est égal à $p + 3$ et ce terme est alors $x_{l_1(p+1) l_1(p+2)}$ c'est la définition de $(s_{p+2}, v_{p+2})$).

D'où, si $u$ n'est pas dans $U(\mathfrak{g})\, m$, on a:

$$u = \left( \prod_{s=0}^{r-1} \prod_{v=2}^{t} \tilde{x}_{l_v(s) l_v(s+1)} \right) x_{12} x_{23} \cdots x_{r\, r+1};$$

d'où aussi:

$$u - \left( \prod_{s=0}^{r-1} \prod_{v=2}^{t} \tilde{x}_{l_v(s) l_v(r+1)} \right) \in U(\mathfrak{g})\, m. \tag{7}$$

Si $k - r$ est strictement supérieur à 1, on recommence le raisonnement précédent en remplaçant $u$ par le terme entre parenthèses dans (7) et en remarquant qu'il n'y a plus de 1 dans $(i_2 \cdots i_r)$ et que tous les entiers $j_2 \cdots j_t$ sont strictement supérieurs à $r + 2$ (i.e., tout est décalé de 1).

On trouve alors que $u$ appartient à $U(\mathfrak{g})\, m$ ou que l'on a:

$$l_2(0)=2, \ldots, l_2(r)=r+2,$$

$$u-\prod_{s=0}^{r-1} \prod_{v=3}^{t} \tilde{x}_{l_v(s) l_v(s+1)}.$$

De proche en proche, on montre que deux cas sont possibles

soit $u$ appartient à $U(\mathfrak{g})\, m$;

(8) soit $l_v(s)=s+v$ si $0 \leqslant s \leqslant r$ et $1 \leqslant v \leqslant k-r$ et en notant $u''=\prod_{s=0}^{r-1} \prod_{v=k-r+1}^{t} \tilde{x}_{l_v(s) l_v(s+1)}$; $u-u'' \in U(\mathfrak{g})\, m$.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que quel que soit $k-r$, si $u$ n'appartient pas à $U(\mathfrak{g})\, m$ il n'existe pas d'entier, noté $w$, compris entre $k-r+1$ et $k$ (au sens large) tel que le couple $(s_w, v_w)$

III.19. Corollaire (notations et hypothèses de III.18). *On fixe $r$, $t$, $\{\alpha\}$, $\{i\}$ et $\{j\}$ satisfaisant aux hypothèses de* III.18 *et on suppose en plus que l'on a*:

$$T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\}) \in I;$$

*alors on a aussi*

$$"T'(\{i\}^{\#}; \{j\}^{\#}; r; \{\alpha\}) \in I^{\#}.$$

On note $\Delta$ l'élément de $Y(1; k \cdots 2)$ de $U(\mathfrak{p})$ (cf. I.23(2) et $"T$ l'élément $"T'(\{i\}^{\#}; \{j\}^{\#}; r; \{\alpha\})$. Soit $u$ un élément de $U(\mathfrak{g})$, d'après II.15, il existe un élément $v$ de $U(\mathfrak{p})$ et un entier, noté $N$ tels que l'on ait:

$$\Delta^N u-v \in I.$$

Comme tout élément de $U(\mathfrak{g})\, m$ est une combinaison linéaire finie d'éléments de la forme $uu'$ où $u$ appartient à $U(\mathfrak{g})$ et $u'$ à $m$, ce qui précède prouve que tout élément de $U(\mathfrak{g})\, m$ multiplié à gauche par une puissance convenable de $\Delta$ devient un élément de $I+U(\mathfrak{p})\, m$.

Grâce à III.18, choisissons donc un entier noté $M$ assez grand pour que l'on ait:

$$\Delta^M(T'(\{i\}; \{j\}; r; \{\alpha\})-"T) \in I+U(\mathfrak{p})\, m;$$

d'où, grâce à l'hypothèse de l'énoncé du corollaire, on a aussi:

$$\Delta^M\, "T \in I+U(\mathfrak{p})\, m.$$

Or, par définition, $''T$ est un élément de $U(\mathfrak{g}_k)$ et $\Delta^M$ est, d'après I.32, congru à 1 modulo $U(\mathfrak{p})\,m$; comme $\mathfrak{g}_k$ stabilise $m$, on voit que l'on a (cf. II.3)

$$''T \in (I + U(\mathfrak{p})\,m) \cap U(\mathfrak{g}_k) = ((I \cap U(\mathfrak{p})) + U(\mathfrak{p})\,m) \cap U(\mathfrak{g}_k) = I^{\#}.$$

D'où le corollaire.

III.20. COROLLAIRE. *L'orbite nilpotente de* $\mathfrak{g}_k$ *définie par* $\operatorname{gr} I^{\#}$ *est l'orbite dont les éléments ont* $(m-1)$ *blocs de Jordan de taille* $(q'_2,..., q'_m)$ (*à l'ordre près*).

Reprenons les notations de III.2; soit $b'$ le plus petit entier tel que $q_{b'}$ soit égal à 1. Si $b'$ est égal à 1, alors $k$ égale $n$ et $\mathfrak{g}_k$ et $I$ sont nuls, le corollaire est trivialement vrai. Supposons donc que $b'$ est strictement plus grand que 1 et on note $b'-1$ par $b$. On remarque qu'en tant que partition de $n-k$, $(q'_2,..., q'_m)$ est la partition duale de $(q_1-1,..., q_b-1)$. Soit $r$ un entier positif inférieur ou égal à $b$; alors on pose:

$$t = n+1-\sum_{j \leqslant r} q_j \qquad (= n+1-s(r)),$$

$$t'' = n-k+1-\sum_{j \leqslant r} (q_j - 1) \qquad (= t-(k-r) \geqslant 0).$$

On note $\mathcal{O}^{\#}$ l'orbite nilpotente définie par $I^{\#}$. D'après III.14 puis III.19, on sait que pour un $r$-uple bien choisi, noté $\{\alpha\}$, on a:

$$\forall \{i\}, \{j\} \in E''_{t''},$$
$$u^{\#}(\{i\}; \{j\}) := {''T'}(\{i\}^{\#}\ \{j\}^{\#}; r; \{\alpha\}) \in I^{\#}.$$

Tout élément de $\mathcal{O}^{\#}$ doit annuler $\operatorname{gr} u^{\#}(\{i\}; \{j\})$; d'après III.3(1) et (2) (prouvés en III.9) où on remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}_k$, on voit facilement (cf. 0.(8)) que l'annulation des fonctions $\operatorname{gr} u^{\#}(\{i\}; \{j\})$ entraîne que tout élément, noté $x$, de $\mathcal{O}^{\#}$ vérifie

$$(1) \qquad \dim \operatorname{Im}(x^r) \leqslant n-k-\sum_{j \leqslant r} q_j, \qquad \forall 1 \leqslant r \leqslant b$$

Notons $\mathcal{O}''$ l'orbite nilpotente définie par la partition $q'_2 \cdots q'_m$; (1) prouve que l'on a:

$$(2) \qquad \mathcal{O}^{\#} \subset \bar{\mathcal{O}}''.$$

Calculons les dimensions de $\mathcal{O}^{\#}$ et de $\mathcal{O}''$; pour celle de $\mathcal{O}^{\#}$, on utilise II.3(4) et II.15, i.e.:

(3) $$\begin{aligned}\dim \mathcal{O}^{\#} &= \dim U(\mathfrak{g}_k)/I^{\#}\\ &= \dim U(\mathfrak{p})/I \cap U(\mathfrak{p}) - (2n-k)(k-1)\\ &= \dim U(\mathfrak{g})/I - (2n-k)(k-1)\\ &= \dim \mathcal{O} - (2n-k)(k-1).\end{aligned}$$

Quant à la dimension de $\mathcal{O}''$, elle se calcule grâce à la partition $(q_1-1,..., q_b-1)$ de $n-k$, i.e.:

$$\begin{aligned}1/2 \dim \mathcal{O}'' &= \sum_{s=1}^{b-1} (q_s-1)\left(\sum_{j=s+1}^{b} (q_j-1)\right)\\ &= \sum_{s=1}^{k-1} (q_s-1)\left(\sum_{j=s+1}^{k} (q_j-1)\right).\end{aligned}$$

Or on a aussi:

$$1/2 \dim \mathcal{O} = \sum_{s=1}^{k-1} q_s\left(\sum_{j=s+1}^{k} q_j\right)$$

d'où:

(4) $$\begin{aligned}&1/2(\dim \mathcal{O}\text{-}\dim \mathcal{O}'')\\ &= \sum_{s=1}^{k-1}\left(\sum_{j=s+1}^{k})(q_j-1)\right) + \sum_{s=1}^{k-1} (k-s)\, q_s\\ &= \sum_{j=1}^{k} (j-1)(q_j-1) + \sum_{s=1}^{k} (k-s)\, q_s\\ &= -k(k-1)/2 + (k-1)\, n = (2n-k)(k-1)/2.\end{aligned}$$

Alors (4), (3) et (2) prouvent le corollaire.

III.21. Ici on va calculer $I \cap U(\mathfrak{p})$, sous l'hypothèse de récurrence, justifiée en IV.1 ci-après, suivante:

$(*)$ Tout idéal primitif complètement premier de $U(\mathfrak{g}_k)$ est induit. Rappelons que la dimension de $\mathfrak{g}_k$ est strictement inférieure à $n$. On garde les notations de III.2.

On note $\mathfrak{q}''$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}_k$ qui contient les matrices triangulaires inférieures et qui est définie par la partition $q_1-1,..., q_b-1$ de $n-k$ (où $b$ est le plus grand entier pour lequel $q_b$ est plus grand que (1). On note $\chi''$ le caractère de $\mathfrak{q}''$ qui est défini de la façon suivante:

Soit $s$ un entier compris entre 1 et $b$ au sens large alors on pose, pour tout entier $j$ compris entre $k+1+\sum_{t<s}(q_t-1)$ et $k+\sum_{t\leqslant s}(q_t-1)$,

$$\chi''(x_{jj})+\sum_{t<s}(q_t-1)=t'_s, \tag{1}$$

c'est-à-dire en tordant par $-1/2$ fois les traces:

$$\tilde{\chi}''(x_{jj})=t'_s-1/2(n-k)+(q_s-1)/2=\tilde{t}_s+(k-1)/2,$$

i.e.:

$$\tilde{\chi}''_s=\tilde{t}_s+(k-1)/2. \tag{2}$$

Alors on va montrer que l'on a:

(3) *L'idéal $I^{\#}$ de $U(\mathfrak{g}_k)$ est induit grâce au caractère $\chi''$ de $q''$.*

(Remarquons que la translation dans (1) disparait si on utilise systématiquement l'induction tordue.)

Grâce à III.20, III.2(5) et l'hypothèse de récurrence $(*)$, on sait que $I^{\#}$ est induit grâce à un caractère de $\mathfrak{q}''$. Pour calculer le caractère on utilise III.19; reprenons les notations de III.17; la définition de $''\bar{T}(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\})$ prouve que III.19 est aussi vrai si on remplace $T'(\ )$ par $\bar{T}$ et $''T'$ par $''\bar{T}$; donc grâce à III.15, on sait que $I$ contient l'ensemble des éléments suivants:

$$''\bar{T}(\{i\};\{j\};r;\{\alpha\}) \qquad \text{où} \quad 1\leqslant r\leqslant b,$$

$$t=(n-k)+1-\sum_{s\leqslant r}q_s, \qquad \{i\},\{j\}\in E''_t \qquad (\text{cf. I.34}),$$

$$\{\alpha\}=(-t'_1,\dots,-t'_r).$$

On utilise maintenant III.16, où on remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{g}_k$ et on voit que $I^{\#}$ est induit par le caractère de $\mathfrak{q}''$ vérifiant (1), d'où (3).

## IV. CONCLUSION

IV.1. THÉORÈME. *Soit $I$ un idéal primitif complètement premier de l'algèbre enveloppante de $sl_n(\mathbb{C})$ ou de $gl_n(\mathbb{C})$, alors $I$ est induit par un idéal de codimension* 1 *de l'algèbre enveloppante d'une sous-algèbre parabolique de $sl_n(\mathbb{C})$ ou $gl_n(\mathbb{C})$ (respectivement).*

Il est clair qu'il suffit de le démontrer pour $gl_n(\mathbb{C})$. Reprenons les notations $\mathfrak{g}$, $k$(i.e., niveau de $I$), $I^{\#}$ (idéal dérivé de $I$), $\mathfrak{g}_k$ de II.3, ainsi que celles de II.20 (i.e., $Z(\mathfrak{g})_s$) et démontrons le théorème par récurrence sur $n$; le théorème est trivial si $n$ est égal à 1. Comme $\mathfrak{g}_k$ est de dimension strictement plus petite que $n$, on choisit une sous-algèbre parabolique, notée $\mathfrak{q}''$, de $\mathfrak{g}_k$ et un caractère $\chi''$ de $\mathfrak{q}''$ permettant de trouver $I^{\#}$ par induction; comme on l'a expliqué en III.2, on peut supposer que $\mathfrak{q}''$ contient les matrices triangulaires inférieures incluses dans $\mathfrak{g}_k$ et que $\mathfrak{q}''$ est définie par une partition de $n-k$, notée $(q_1-1,..., q_b-1)$ vérifiant:

$$q_1 \geqslant \cdots \geqslant q_b > 1.$$

On note $\mathfrak{q}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ contenant les matrices triangulaires inférieures et définies par la partition de $n$ suivant

$$(q_1,..., q_b, 1 \cdots 1) \qquad \text{où} \quad 1 \text{ apparaît } k-b \text{ fois.}$$

Remarquons que le niveau de $I^{\#}$ (dans $U(\mathfrak{g}_k)$) est $b$ d'après III.14(3) (où on change $(I, \mathfrak{g})$ en $(I^{\#}, \mathfrak{g}_k)$ et qu'il est inférieur ou égal à $k$ (cf. II.19))

(1) Ainsi le $t$ de II.20 est maintenant $b$.

Définissons un caractère de $\mathfrak{q}$, noté $\chi$, tout d'abord sur l'ensemble des éléments $(x_{jj})$ où $j$ est inférieur ou égal à $n-(k-b)$ par les formules III.21(1) et III.2(1); on définit ensuite $\chi$ sur toutes les matrices diagonales, tore noté $\mathfrak{h}$, en s'arrangeant pour que l'image de $I \cap Z(\mathfrak{g})_{k-b}$ par l'homomorphisme de Harish–Chandra soit incluse dans le noyau de $\chi$ (i.e., $\chi - 1/2 \operatorname{tr} \operatorname{ad} \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$) prolongé en un caractère de $U(\mathfrak{h})$; cela est possible puisque $\chi(x_{jj})$ pour $j$ compris entre $n-(k-b)+1$ et $n$, au sens large, restait à déterminer. Notons $I'$ l'idéal primitif complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ obtenu en induisant le noyau de $\chi$ prolongé de manière évidente à $U(\mathfrak{q})$. D'après III.14(3), III.21 et l'hypothèse de récurrence (qui assure $(*)$ en III.21), on sait que l'on a:

- niveau de $I' = k$,
- $I'^{\#} = I^{\#}$;

d'où (cf. III.3(1))

$$I \cap U(\mathfrak{p}) = I' \cap U(\mathfrak{p}).$$

Par définition de $\chi$, on a aussi:

$$I \cap Z(\mathfrak{g})_{k-b} = I' \cap Z(\mathfrak{g})_{k-b};$$

d'où le théorème grâce à II.20 (cf. (1) pour le changement de notation).

IV.2. *Remarque.* Notons $\mathfrak{p}'$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ (où $\mathfrak{g}$ est $gl_n(\mathbb{C})$ engendrée par $\mathfrak{p}$ et l'élément $x_{11}$; soit $\mathfrak{p}_n$, comme en [Di1], la sous-algèbre de $\mathfrak{p}'$ ensemble des matrices de trace nulle et notons $Z_1$ l'élément $\sum_{i=1}^{n} x_{ii}$; il est clair que $\mathfrak{p}'$ est le produit direct de $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}_n$) et du sous-tore de $\mathfrak{g}$ engendré par $Z_1$. Soit $I$ un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$, alors $I \cap \mathbb{C}[Z_1]$ est un idéal maximal de $\mathbb{C}[Z_1]$ et les trois assertions suivantes sont équivalentes:

- $I \cap U(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{p}')$,
- $I \cap U(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{p})$,
- $I \cap U(\mathfrak{p}_n) \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{p}_n)$.

*Ainsi* II.16, *prouve la conjecture* [Di1, 6.12].

Remarquons aussi que la réduction de Mackey (cf. II.2) se fait de la même façon pour les 3 sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ que sont $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}_n$; ainsi la notion de niveau de ce papier est la même que celle de [Di1, 5.6] et d'après III.14(3) et IV.1, on a donc démontré l'interprétation suivante du niveau d'un idéal primitif complètement premier de $U(\mathfrak{g})$, noté $I$:

*Le niveau de I est la dimension du plus grand bloc de Jordan d'un élément de l'orbite nilpotente attachée à I.*

De plus, on a défini en III.3 l'idéal dérivé de $I$ noté $I^{\#}$; notons $\mathfrak{g}'_k$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par $[\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k]$ et l'élément $\sum_{i=1}^{k} x_{ii}$ et notons aussi $\mathfrak{g}_k(n)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'_k$ ensemble des matrices de trace nulle. En travaillant avec $\mathfrak{p}'$ (resp. $\mathfrak{p}_n$) au lieu de $\mathfrak{p}$, on définit de manière analogue à $I^{\#}$ des idéaux complètement premiers de $U(\mathfrak{g}'_k)$ (resp. $U(\mathfrak{g}'_k(n))$), notés $I'$ (resp. $I'_n$); il est facile de voir que l'on a:

$$I^{\#} \cap U([\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k]) = I' \cap U[(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k]) = I'_n \cap U([\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_k]).$$

On peut alors définir le deuxième niveau de $I$ comme étant le niveau de $I$ ou de $I'_n$, ces deux entiers coïncident. D'après III.21, on siat que l'on a:

*Le deuxième niveau de I est la taille du deuxième bloc de Jordan* (*pour l'ordre décroissant*) *d'un élément de l'orbite nilpotente attachée à I.*

On peut donc retrouver l'orbite nilpotente attachée à un idéal primitif complètement premier de $U(\mathfrak{g})$ en calculant des intersections d'idéaux et de sous-algèbres envelloppantes et en utilisant la théorie de Mackey.

IV.3. THÉORÈME. *Soit I un idéal complètement premier de l'algèbre enveloppante de* $gl_n(\mathbb{C})$ *ou* $sl_n(\mathbb{C})$, *alors il existe une sous-algèbre parabolique, notée* $\mathfrak{q}$, *et un idéal complètement premier, noté J, de* $U(\mathfrak{q})$ *contenant* $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ *tel que I soit induit par J.*

Le cas de $sl_n(\mathbb{C})$ se déduisant de celui de $gl_n(\mathbb{C})$, nous traiterons ce dernier cas en notant $gl_n(\mathbb{C})$ par $\mathfrak{g}$. La démonstration de IV.3 est analogue à celle de IV.1; soit $k$ le niveau de $I$ et $I^{\#}$ l'idéal dérivé de $I$ (cf. II.3) dont on reprend les notations). On démontre le théorème par récurrence sur $n$; comme la dimension de $\mathfrak{g}_k$ est strictement plus petite que $n$, on sait que l'idéal complètement premier (cf. II.3) $I^{\#}$ de $U(\mathfrak{g}_k)$ est induit par un idéal complètement premier, noté $J''$, d'une sous-algèbre parabolique, noté $\mathfrak{q}''$, de $\mathfrak{g}_k$, où $J''$ contient $[\mathfrak{q}'', \mathfrak{q}'']$. Il est alors clair qu'il existe une sous-variété fermée et irréducible, notée $\mathscr{F}''$, de $\mathfrak{q}''^*$ tel que l'on ait:

- $\forall \chi'' \in \mathscr{F}''$, $\chi''[\mathfrak{q}'', \mathfrak{q}''] = 0$,
- (en notant $m_{\chi''}$ l'idéal maximal de $U(\mathfrak{q}'')$ noyau du caractère $\chi''$ où $\chi''$ appartient à $\mathscr{F}''$)

$$J'' = \bigcap_{\chi'' \in \mathscr{F}''} m_{\chi''}.$$

Alors on a:

$$I^{\#} = \bigcap_{\chi'' \in \mathscr{F}''} \operatorname{ind}(m_{\chi''}, \mathfrak{q}'', \mathfrak{g}_k). \tag{1}$$

Le niveau d'un idéal $\operatorname{ind}(m_{\chi''}, \mathfrak{q}'', \mathfrak{g}_k)$ est constant quand $\chi''$ parcourt $\mathscr{F}''$ (cf. III.14(3)) et en regardant la définition du niveau de $I^{\#}$, donnée en II.3 où on change $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}_k$, il est clair que c'est aussi le niveau de $I^{\#}$. On peut alors, grâce à II.19, définir $\mathfrak{q}$ comme dans la démonstration de IV.1 dont on reprend les notations. Soit $\chi''$ un élément de $\mathscr{F}''$, et on définit un sous-ensemble de caractère de $\mathfrak{q}$, noté $\mathscr{F}(\chi'')$ de la façon suivante:

(2) $\chi \in \mathscr{F}(\chi'') \Leftrightarrow \chi(x_{jj})$ vérifie III.21(1) quand $j$ est inférieur ou égal à $n-k+b$ et le noyau de $\tilde{\chi}$ dans $U(\mathfrak{h})$ contient l'image de $I \cap Z(\mathfrak{g})_{k-b}$ par l'homomorphisme de Harish-Chandra. On pose:

$$\mathscr{F} = \bigcup_{\chi'' \in \mathscr{F}''} \mathscr{F}(\chi''),$$
$$\tilde{\mathscr{F}} = \{\tilde{\chi} \mid \chi \in \mathscr{F}\}.$$

En outre avec les notations de III.10, l'application suivante de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$:

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) \to (a_1 \cdots a_{n-k+b}, S_1(a_1 \cdots a_n), \dots, S_{k-1}(a_1 \cdots a_n))$$

est un revêtement galoisien. On identifie $\tilde{\mathscr{F}}$ de manière évidente à une sous-variété fermée de $\mathbb{C}^n$, et $\mathscr{F}''$ à une sous-variété fermée et irreductible de $\mathbb{C}^{n-k+b}$ grâce à III.21(2), i.e.,

$$\chi'' \to a_1 = \cdots = a_{q_1} = \tilde{\chi}''(x_{k+1,k+1}) - (k-1)/2$$
$$a_{q_1} = \cdots = a_{q_1+q_2} = \tilde{\chi}''(x_{k+q_1,k+q_1}) - (k-1)/2 \cdots.$$

De plus, grâce à l'homomorphisme de Harish-Chandra, $Z(\mathfrak{g})_{k-b}$ s'identifie au polynôme en les $(k-b)$ variables $S_i$ (où $i$ varie entre 1 et $k-b$ au sens large) et on note $X$ la sous-variété fermée de $\mathbb{C}^{k-h}$ définie par $I \cap Z(\mathfrak{g})_{k-h}$. Alors avec (2) on obtient:

$$\chi \in \bar{\mathscr{F}} \iff \chi \in \varphi^{-1}(\mathscr{F}'' \times X). \tag{3}$$

Ainsi $\mathscr{F}$ est une sous-variété fermée irréductible de $\mathfrak{q}^*$ formée de caractères de $\mathfrak{q}$. On prolonge chaque élément de $\mathscr{F}$, noté $\chi$, en un caractère de $U(\mathfrak{q})$ et on note $m_\chi$ son noyau; alors l'idéal $J$ suivant de $U(\mathfrak{q})$:

$$J = \bigcap_{\chi \in \mathscr{F}} m_\chi$$

est un idéal complètement premier de $U(\mathfrak{q})$; d'après [C], l'idéal induit suivant:

$$I' = \operatorname{ind}(J, \mathfrak{q}, \mathfrak{g}) \qquad \left( = \bigcap_{\chi \in \mathscr{F}} \operatorname{ind}(m_\chi, \mathfrak{q}, \mathfrak{g}) \right)$$

est un idéal complètement premier. Il ne reste plus qu'à démontrer que $I$ et $I'$ coïncident; on a

$$L := I' \cap U(\mathfrak{p}) = \bigcap_{\chi \in \mathscr{F}} (\operatorname{ind}(m_\chi, \mathfrak{q}, \mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{p})).$$

Reprenons la notation $m(k)$ de III.3 et posant $\mathfrak{g}'_k$ la sous-algèbre de $\mathfrak{p}$ engendré par $\mathfrak{g}_k$ et l'ensemble des éléments $(x_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$; d'après III.21 (et IV.1 qui démontre $(*)$), on a:

$$\begin{aligned} L &= \bigcap_{\chi'' \in \mathscr{F}''} \operatorname{ind}(\operatorname{ind}(m_{\chi''}, \mathfrak{q}'', \mathfrak{g}_k) + U(\mathfrak{g}'_k)\, m(k), \mathfrak{g}'_k, \mathfrak{p}) \\ &= \operatorname{ind}(I^\# + U(\mathfrak{g}'_k)\, m(k), \mathfrak{g}'_k, \mathfrak{p}) \end{aligned}$$

d'où, par définition de $I^\#$:

$$I' \cap U(\mathfrak{p}) = I \cap U(\mathfrak{p}).$$

Il résulte de (3), que l'on a aussi

$$I' \cap Z(\mathfrak{g})_{k-h} = I \cap Z(\mathfrak{g})_{k-h}$$

et le théorème est donc une conséquence de II.20.

## Remerciement

Je remercie R. Rentschler pour les conversations que nous avons eues sur ce sujet.

## BIBLIOGRAPHIE

[B] W. BORHO, Definition einer Dixmier-Abbildung für $sl_n(\mathbb{C})$, *Invent. Math.* **40** (1977), 143–169.

[BJ] W. BORHO ET J. C. JANTZEN, Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra, *Invent. Math.* **39** (1977), 1–53.

[BK] W. BORHO ET H. KRAFT, Über die Gelfand Kirilov dimension, *Math. Ann.* **220** (1976), 1 – 24.

[BR] W. BORHO ET R. RENTSCHLER, Oresche Teilmengen in Einhüllenden Algebra, *Math. Ann.* **217** (1975) 201–210.

[C] N. CONZE, Algèbres d'opérateurs différentiels et quotient des algèbres enveloppantes, *Bull. Soc. Math. France* **102** (1974) 379–415.

[Di1] J. DIXMIER, Sur les algèbres enveloppantes de $sl(n, \mathbb{C})$ et $af(n, \mathbb{C})$, *Bull. Sci. Math.* $n°$100 (1976), 57–96.

[Di2] J. DIXMIER, Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, *J. Algebra* **48** (1977), 96–112.

[Di3] J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthier–Villars, Paris/Bruxelles/Montréal, 1974.

[D] M. DUFLO, Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, *Ann. of Math.* **105** (1977), 107–120.

[MR] C. MOEGLIN ET R. RENTSCHLER, Sur la classification des idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, *Bull. Soc. Math. France*, à paraître.

[N] H. NGHIEM-XUAN, Réduction de produits semi-directs et conjecture de Gelfand Kirilov, *Bull. Soc. Math. France* **107** (1979) 241–267.